UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

El pensamiento visual en las identidades trigonométricas

Autor/es

EDGAR LABARGA VARONA

Director/es

ÁNGEL ALBERTO MAGREÑÁN RUIZ

Facultad

Escuela de Máster y Doctorado de la Universidad de La Rioja

Titulación

Máster Universitario de Profesorado, especialidad Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2018-19

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

Trabajo de Fin de Máster

El pensamiento visual en las identidades trigonométricas

Autor

Edgar Labarga Varona

Tutor: Ángel Alberto Magreñán Ruiz

MÁSTER:
Máster en Profesorado, Matemáticas (M06A)

Escuela de Máster y Doctorado

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

AÑO ACADÉMICO: 2018/2019

Para todos aquellos alumnos que conocí en mi etapa de prácticas y a los que deseo un próspero futuro académico.

AGRADECIMIENTOS

Primero de todo quisiera agradecer a mi tutor Ángel Alberto Magreñán Ruiz que ha supervisado el trabajo, me ha proporcionado material y me ha dado útiles consejos sin los que esta memoria no hubiera sido presentada en su estado actual.

También me gustaría dedicar unas líneas de agradecimiento a Enrique, mi tutor de prácticas, y a todos sus alumnos por la acogida que tuve en el período de prácticas. La experiencia me ha servido en parte de apoyo para elaborar este documento.

Agradecer a mi hermano las magníficas explicaciones que me permitieron completar la parte de Biología del trabajo. Si ese apartado contiene alguna imprecisión, toda la responsabilidad es mía.

Por último, expresar mis agradecimientos y profunda admiración a Óscar, Emilio y Juan Luis. Cada día me enseñan que la Matemática bien merece la pena.

RESUMEN

En el actual sistema educativo español, los estudiantes son introducidos a la Trigonometría en el último curso de la Educación Secundaria. Estos conceptos se exploran con mayor profundidad en primero de Bachillerato de Ciencias donde es posible apreciar dificultades en el aprendizaje de una gran parte del alumnado.

La visualización en matemáticas es un recurso didáctico que se vio desplazado por las corrientes formalistas imperantes durante una gran parte de los siglos XIX y XX y que parece haber recobrado importancia en los últimos años. En este trabajo proponemos el uso de la visualización para una mejor adquisición y comprensión de las identidades trigonométricas a fin evitar un aprendizaje memorístico de las mismas a la vez que proporcionamos al alumno ideas para su demostración.

Palabras clave: Visualización en matemáticas, identidades trigonométricas, pensamiento visual, Trigonometría, propuesta de intervención didáctica.

ABSTRACT

Students begin learning Trigonometry in the last course of Educación Secundaria following the current Spanish Education System. A deep understanding of the subject is required in Bachillerato de Ciencias' first level where many students have learning difficulties.

Visualization is a valuable teaching technique in mathematics. The formalism of the 19th and 20th centuries prevailed over it, but it has been on the rise in the last few years. In this work, we consider the use of visualization in teaching and learning trigonometric identities. The aim is twofold: to avoid memorizing in learning these identities and to give ideas to students for proving them.

Keywords: Visualization in mathematics, trigonometric identities, visual thinking, Trigonometry, proposal for a didactic intervention program.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

1. INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

La Matemática es por antonomasia la más exacta de las ciencias. Asumiendo unos determinados postulados es posible construir, con la inestimable colaboración de esa guía que es la Lógica, una sólida teoría cuya principal característica es la veracidad, sujeta a esos axiomas, de los resultados que de éstos se derivan. Una parte central en todo este proceso son las demostraciones. Todo resultado que ha sido probado dentro de una teoría matemática adquiere una perpetuidad e inmutabilidad a partir de entonces.

Citamos por ejemplo el Teorema de Pitágoras (ver el Teorema 1.1) cuyo enunciado es bien conocido entre los estudiantes de Secundaria hoy en día. Se atribuye, con cierta controversia, a Pitágoras de Samos quien fue un matemático de la antigua Grecia que vivió hace más de dos mil quinientos años. Con certeza, mucho ha cambiado durante este largo período de tiempo hasta nuestros días, pero no así el teorema cuya esencia es la misma tanto para los alumnos de esa etapa como para el matemático heleno.

El arte de demostrar un resultado puede llegar a ser una tarea ardua y de extrema complejidad. Como ya hemos mencionado, es extraño que en cursos de Secundaria no haya una gran parte del alumnado que sepa recitar el enunciado del Teorema de Pitágoras. La situación cambia de forma radical si preguntamos por una demostración. De hecho, existen problemas matemáticos que han tardado mucho tiempo en ser resueltos y otros para los que todavía se persigue con ahínco pero sin éxito una solución. Y es que la normativa vigente no contempla tener que aprender demostraciones de, por ejemplo, el Teorema de Pitágoras entre los contenidos matemáticos de la Educación Secundaria. Ciertamente no es muy habitual que los alumnos sean introducidos a las demostraciones (al menos como tales) en esta etapa, a pesar de que en ocasiones estén al alcance del estudiante. La razón puede subyacer en la necesidad de un pensamiento mucho más abstracto para lidiar con este tipo de cuestiones (ver [6] para más información al respecto). En su lugar, el currículo establecido en [4]

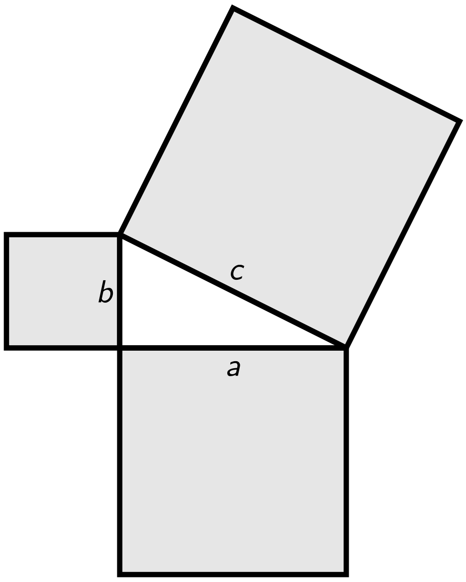

Figura 1.1: Posible posición en el Teorema de Pitágoras. *(Fuente: Elaboración propia)*

sí considera que la introducción del Teorema de Pitágoras vaya acompañada de lo que allí se denominan «demostraciones geométricas».

No es una tarea sencilla explicar qué se entiende por demostración geométrica, por lo que aquí nos limitaremos a dar algún ejemplo ilustrativo. Comenzaremos proporcionando un enunciado formal del teorema.

Teorema 1.1 (de Pitágoras)**.** *Dado un triángulo rectángulo con catetos de longitudes a y b e hipotenusa de longitud c, se tiene que*[1]*:*

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1.1}$$

Una observación que es recomendable hacer a los alumnos la primera vez que se les expone este teorema es indicar que esos cuadrados que aparecen de forma algebraica en (1.1) pueden interpretarse efectivamente como tales, es decir, como las propias figuras geométricas construidas sobre los respectivos lados del triángulo (ver Figura 1.1). De hecho era esa la idea griega original.

En vista de esta curiosa relación, cabe preguntarse si existe alguna manera de intuir este resultado. Vamos a utilizar un procedimiento que se menciona varias veces

[1] De hecho, esta propiedad caracteriza a todos los triángulos rectángulos.

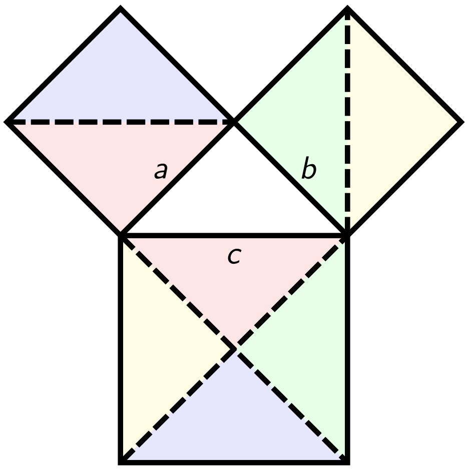

Figura 1.2: El Teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo que además es isósceles. *(Fuente: Elaboración propia)*

en [45, Parte III]. Se trata de reducir la pregunta inicial a una situación más simple. De este modo, veamos qué ocurre si tomamos un triángulo rectángulo que además es isósceles, es decir, cuando $a = b$. En este caso particular, si dibujamos el triángulo con los respectivos cuadrados sobre sus lados y efectuamos de forma adecuada varias subdivisiones no resulta complicado observar la relación entre las áreas de los cuadrados (ver Figura 1.2), esto es, ver que se cumple (1.1) para este caso. Esto nos proporciona una base para poder conjeturar que si la relación es cierta para un triángulo rectángulo e isósceles también ha de serlo para un triángulo rectángulo cualquiera.

En la literatura pueden encontrarse fácilmente varias demostraciones geométricas clásicas que se remontan a civilizaciones antiguas como la griega o la china y que han sido ampliamente difundidas. Es por ello que aquí hemos seleccionado algunas de ellas adicionales que se deben a dos personajes célebres de la Historia, J. A. Garfield (1831–1881) conocido por ser el vigésimo presidente de los Estados Unidos de América y Leonardo da Vinci (1452–1519), genio italiano del Renacimiento. Ambas muestran técnicas simples y a la vez ingeniosas que permiten deducir de una forma visual (sin palabras) el teorema (ver Figura 1.3).

Para finalizar con esta serie de ilustraciones y evitar que el lector asocie erró-

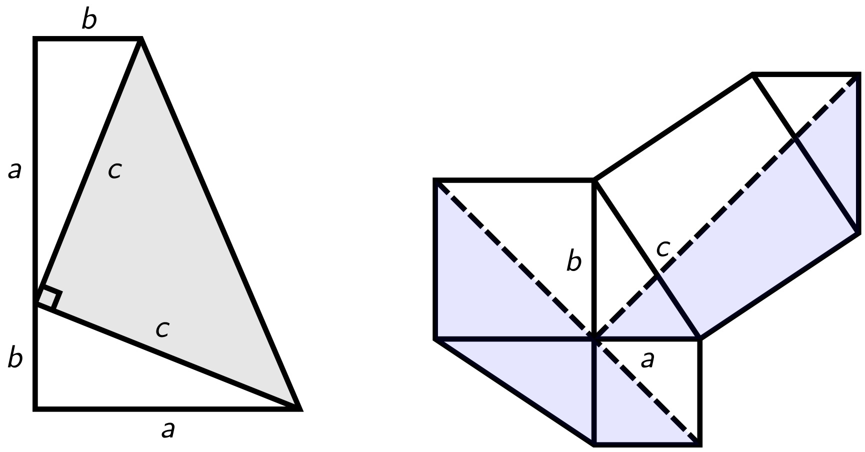

Figura 1.3: A la izquierda una representación gráfica para la demostración del presidente Garfield y a la derecha otra para la de Leonardo da Vinci. *(Fuente: Elaboración propia)*

neamente este tipo de demostraciones al área de la Geometría, mostramos en la Figura 1.4 una sencilla forma de que el alumno recuerde mediante imágenes dos identidades notables comúnmente usadas. Por una parte, que el cuadrado de una suma de dos cantidades es igual a la suma de los cuadrados de cada una de ellas por separado más el doble de su producto, y por otra, que el cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual a la suma de los cuadrados de cada término por separado menos el doble de su producto. Es sencillo observar que de igual modo se hubiera podido representar la identidad que expresa el producto de una suma y una diferencia de dos cantidades como la diferencia de sus cuadrados.

De todo este abanico de ejemplos debemos hacer dos observaciones que tienen gran relevancia. La primera es que son muchos los casos en los que las representaciones geométricas de un problema (geométrico o no), siempre que las haya, son de extrema utilidad para comprenderlo y después resolverlo. La segunda entronca con la primera y hace referencia a que ninguna de las demostraciones geométricas anteriormente mostradas puede considerarse como una demostración matemática rigurosa. Para probar, por ejemplo, el Teorema de Pitágoras, y en general cualquier resultado, es necesario hacer uso de las herramientas abstractas que proporciona la

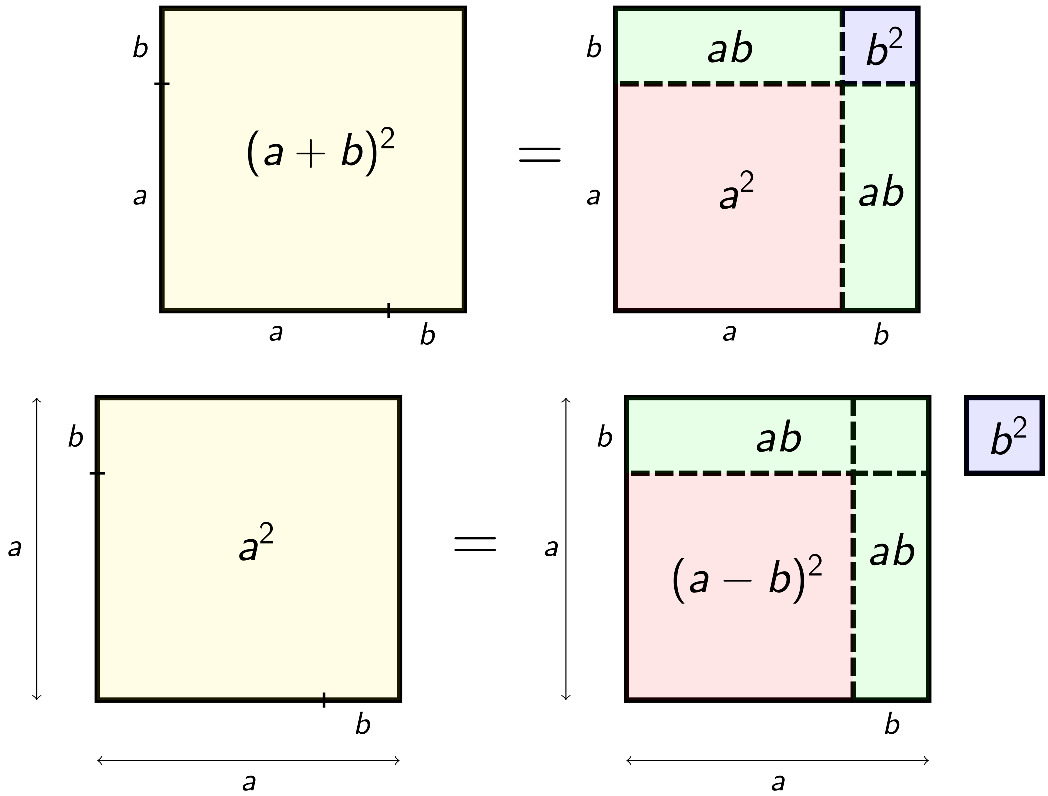

Figura 1.4: En la imagen superior el cuadrado amarillo de lado $a+b$ puede descomponerse de forma apropiada en uno rojo de lado a, uno azul de lado b y dos rectángulos verdes de lados a y b. Esto conduce a la identidad algebraica $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. En el segundo caso el cuadrado amarillo de lado a puede construirse con un cuadrado rojo de lado $(a-b)$, dos rectángulos verdes de lados a y b a los que deberemos substraer un cuadrado azul de lado b pues se superponen. *(Fuente: Elaboración propia)*

Matemática. Solo en este último caso podremos asegurar la certeza del resultado.

A pesar de ese defecto, las demostraciones geométricas pueden servir para guiarnos hacia una demostración rigurosa, o para generar la clave de ésta. De hecho, muchas veces nos encontramos con la dificultad de cómo empezar a resolver un problema, y el uso del recurso gráfico nos proporciona ese empujón que necesitábamos. No sin razón, en el lenguaje cotidiano es común escuchar la frase «Una imagen vale más que mil palabras».

Este trabajo intenta aprovechar los beneficios de las demostraciones geométricas y del razonamiento visual de tal forma que sean una ayuda para el estudiante de cara a la adquisición de determinados conocimientos. En concreto, aquí nos centramos en las identidades trigonométricas y los teoremas del seno y del coseno. La Trigonometría suele ser un tema poco atractivo para los alumnos en muchas ocasiones. Presentarla de una manera rápida y conectada con otros bloques temáticos hace que el estudiante se despiste y no consiga distinguir bien los conceptos (ver [33]). Por ejemplo, el alumno ha aprendido que el seno de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa de ese triángulo, pero también lo ha visto localizado en la circunferencia goniométrica donde los ángulos se distribuyen por los cuatro cuadrantes, o en el tema de funciones cuando se introduce la función seno. Una pregunta natural para el estudiante puede ser la siguiente, ¿qué es el seno de un ángulo realmente, una razón entre longitudes de segmentos o una función?

Esta problemática se presenta también al impartir de forma apresurada y sin justificación las identidades entre las razones trigonométricas y los teoremas del seno y del coseno. Nuestra propuesta se ubica precisamente en aportar una solución a este problema utilizando la visualización en matemáticas, es decir, diseñando recursos visuales que permitan mejorar la comprensión de estos contenidos en los alumnos.

La estructura de la memoria es la siguiente: este capítulo constituye una introducción para generar una idea en el lector de los puntos más importantes que abordaremos. En el segundo capítulo se incluyen los objetivos propios del trabajo y además los que se refieren al currículo de Trigonometría en primero de Bachillerato de Ciencias. El tercer capítulo trata los fundamentos teóricos del trabajo. Desde una perspectiva histórica de la visualización hasta algunas sugerencias para el diseño de imágenes, pasando por la adecuación del trabajo al marco legal, una definición de visualización en matemáticas y algunas teorías del aprendizaje visual. En el cuarto capítulo se revisa el estado actual de la visualización en la educación. La propuesta en sí puede encontrarse en el quinto capítulo. Primero se detallan los objetivos didácticos y las competencias que se quieren alcanzar con ella. Seguidamente, se presenta la propuesta que contendrá figuras diseñadas con ordenador por el autor para ejercitar la visualización matemática en los alumnos dentro del contexto de las identidades trigonométricas y de los teoremas del seno y del coseno. Completamos el capítulo analizando cuestiones relativas a la diversidad en las aulas, una posible metodología que puede seguir el profesor al poner en práctica el proyecto, el desarrollo del mismo, la evaluación y el uso de las nuevas tecnologías. Los dos últimos capítulos se dedican a discutir la viabilidad de la propuesta y a exponer las conclusiones más importantes del trabajo. De manera adicional, se ha incluido un apéndice con las figuras de las identidades trigonométricas y de los teoremas del seno y del coseno elaboradas a mano por el autor para mostrar que la propuesta puede llevarse a cabo sin necesidad de las nuevas tecnologías.

2. OBJETIVOS

Los currículos de Secundaria y Bachillerato redactados en [4] y [5] indican que el primer contacto de los estudiantes con los conceptos básicos de Trigonometría se produce en cuarto de Secundaria dentro del Bloque III de Geometría para Matemáticas Aplicadas a las Enseñanzas Académicas. Sin embargo, las identidades trigonométricas más habituales no aparecen hasta el primer curso de Bachillerato de Ciencias en el Bloque IV de Geometría.

Para poner en perspectiva al lector, hemos creído oportuno presentar los objetivos que se deducen del currículo de Bachillerato en cuanto a Trigonometría respecta, antes de pasar a tratar los objetivos concretos que se persiguen en este trabajo:

1. Expresar y manejar correctamente ángulos en radianes.

2. Conocer y saber trabajar con las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera, con las fórmulas para las razones trigonométricas de la suma y la diferencia de ángulos, con las que se refieren al ángulo doble y al ángulo mitad y con las fórmulas de transformaciones trigonométricas.

3. Conocer y saber utilizar los teoremas del seno y del coseno.

4. Ser capaz de resolver ecuaciones trigonométricas simples.

5. Resolver triángulos y problemas geométricos variados que procedan del mundo real.

Una vez enumerados los objetivos relacionados con el currículo pasamos a detallar los objetivos propios de este trabajo. El principal propósito es el de utilizar la visualización matemática para mejorar la comprensión y el manejo de las identidades trigonométricas y de los teoremas del seno y del coseno en los alumnos, y a su vez proporcionarles ideas para su demostración. De igual modo se persiguen otros objetivos más específicos:

1. Realizar una búsqueda bibliográfica en profundidad sobre la visualización en matemáticas.

2. Ofrecer una alternativa a la enseñanza usual de las identidades trigonométricas y de los teoremas del seno y del coseno haciendo uso de la visualización en matemáticas, de tal forma que el alumno adquiera cierta autonomía en la comprensión de argumentos matemáticos y pueda aplicar estas nociones en otros ámbitos de la Matemática sin requerir técnicas memorísticas.

3. Proponer una forma de enseñanza basada en las demostraciones geométricas para acercar al alumno a las demostraciones matemáticas con el fin de que el salto necesario de abstracción se haga de un modo paulatino.

4. Aportar material didáctico de carácter visual que potencie la intuición y la creatividad de los alumnos.

En vista de la normativa en vigor (ver [1], por ejemplo), hemos considerado otros objetivos de carácter transversal que deben ser tenidos en cuenta a la hora de la implantación en el aula de esta propuesta:

1. Dotar al alumno de determinados hábitos en la expresión y escritura de contenido matemático de manera que muestre el rigor propio de esta ciencia y pueda participar en debates de carácter científico.

2. Conseguir que el alumno establezca e interprete las conexiones entre la Trigonometría y el mundo que nos rodea.

3. Lograr que el estudiante valore las aplicaciones de la Trigonometría y de la Matemática en general, y sea consciente de su importancia.

4. Concienciar al alumno de que practique la autocrítica de forma positiva y reflexione sobre la actividad de sí mismo.

3. MARCO TEÓRICO

Grandes personajes científicos y matemáticos han compartido su predilección por utilizar las imágenes en sus procesos mentales. Quizás el caso más sonado es el del físico A. Einstein (1879–1955) conocido mundialmente por enunciar la Teoría de la relatividad especial y general a comienzos del siglo XX. Tras ser preguntado por J. Hadamard (1865–1963), Einstein expresa lo siguiente [26, Apéndice II]:

> «Las palabras o el lenguaje, escrito o hablado, no parecen jugar ningún papel en el mecanismo de mi pensamiento. Las entidades físicas que parecen servir como elementos en el pensamiento son ciertos signos e imágenes más o menos claras que pueden ser “voluntariamente” reproducidas y combinadas.
>
> »Por supuesto, hay una cierta conexión entre esos elementos y los correspondientes conceptos lógicos. También es claro que el deseo de llegar finalmente a conceptos lógicamente conectados es la base emocional de este más bien impreciso juego con los elementos mencionados anteriormente. Pero desde un punto de vista psicológico, este juego de combinaciones parece ser la característica esencial del pensamiento productivo —antes de que haya cualquier conexión con construcciones lógicas mediante palabras u otro tipo de signos que puedan ser comunicados a los demás.»

En la línea de razonamiento de Einstein podemos situar a matemáticos tan importantes como L. Euler (1707–1783), C. F. Gauss (1777–1855), H. Poincaré (1854–1912), el propio Hadamard y D. Hilbert[1] (1862–1943). Como en cualquier dilema,

[1] Puede parecer contradictorio haber incluido en esta sucinta lista al gran matemático alemán, después de todo, su obra [29] es un intento de desligar la geometría de toda intuición y apoyarse exclusivamente en los razonamientos lógicos. Sin embargo, parece evidente que ese sentido geométrico propio del mundo que nos rodea se encuentra paradójicamente presente durante toda la obra en el autor tal y como se indica en [26, p. 88].

existen otros personajes que se posicionan en el polo diametralmente opuesto. Ejemplos de ello son K. Weierstrass (1815–1897), C. Hermite (1822–1901) y J. Dieudonné (1906–1992).

Lo cierto es que la visualización en matemáticas presenta ventajas (ver secciones posteriores) e inconvenientes (ver [21, 11]) en el aprendizaje. Así pues, ya adelantamos que no hay una postura universalmente aceptada ante esta disyuntiva. Es por ello que en esta sección se incluyen los fundamentos teóricos que nos han llevado a situar este trabajo en el primero de los grupos.

3.1. Trasfondo histórico

La plasmación del pensamiento mediante imágenes es tan antigua como la Matemática misma. Hay evidencias explícitas de que tanto babilonios como egipcios de las civilizaciones antiguas utilizaban diagramas, dibujos y esquemas en su actividad matemática. En este sentido el lector puede consultar [42, 51] de entre una amplia literatura.

Para la Matemática, los siglos subsiguientes transcurrieron bajo la tutela de la antigua civilización griega, que elevó esta ciencia a sus máximas cotas de esplendor. El uso de imágenes en el pensamiento de los matemáticos griegos queda perfectamente reflejado en la cita del filósofo Aristóteles en la que asegura que el ser humano no puede pensar sin imágenes (ver [26, p. 71]). Precisamente su maestro Platón ya contemplaba las imágenes en sus tratados y establecía una diferencia fundamental con lo que denominaba ideas.

El declive de la civilización griega sumió a la Matemática en un profundo letargo que perduró hasta el florecimiento de las nuevas iniciativas de la Revolución científica en el siglo XVII. Se puede observar cómo varias de las obras de Galileo Galilei (1564–1642), R. Descartes (1596–1650) e I. Newton (1643–1727) están sembradas de imágenes y figuras que acompañan al texto.

En lo que aquí nos concierne, las primeras investigaciones serias en el ámbito del pensamiento visual se deben al polifacético F. Galton (1822–1911). En sus trabajos encontramos por primera vez un interés en el estudio de los procesos mentales asociados con las imágenes. La curiosidad del británico podía provenir de su propia experiencia ya que él mismo aseguraba [26, p. 69] que le suponía una tortura tener que explicar con palabras aquello que se representaba con total nitidez en su mente a través de palabras sin sentido (que pueden ser asemejadas a cierto tipo de imágenes). El trabajo de Galton abrió el estudio, tanto psicológico como científico, del pensamiento visual.

Pero el siglo XIX traería consigo una severa reticencia hacia el uso de la visualización en el ámbito matemático. Esto se debió especialmente a los avances en el estudio de fenómenos o resultados a los que les faltaba una base rigurosa, o eran contrarios a la intuición, como por ejemplo los procesos del límite propios del Análisis matemático, las Geometrías no euclídeas o los desconcertantes trabajos de G. Cantor (1845–1918) sobre el infinito. El resultado de estos estudios culminó con las obras del grupo Bourbaki[2] (1934/1935–Hoy) tratando de fundamentar toda la Matemática con un alto grado de abstracción y desencadenando que las técnicas de visualización se apartaran de la enseñanza.

3.2. Marco legal

Nuestra propuesta se acompaña de cierta flexibilidad en su aplicación al aula, aunque en principio se ha dirigido a alumnos de primero de Bachillerato de Ciencias. Las características cognitivas de este tipo de estudiantes hacen idónea esta etapa para el aprendizaje de las identidades trigonométricas y de los teoremas del seno y del coseno mediante demostraciones geométricas. La elección se ve respaldada por lo que se encuentra estipulado en el currículo [5] para el bloque IV de Geometría, ya que es ahí donde se hace explícito el necesario aprendizaje de esas nociones. Además,

[2] El grupo se citó por primera vez en el Café Capoulade en París el 10 de diciembre de 1934 aunque fue un año más tarde cuando tomaron la decisión de firmar sus trabajos bajo el seudónimo de Nicolas Bourbaki.

según el currículo que se presenta en [4], los alumnos ya tendrán a su disposición en ese momento de su aprendizaje los conceptos básicos de Trigonometría suficientes para entender los contenidos de este tema de Bachillerato.

Es importante mencionar que el pensamiento visual no está ligado únicamente a la Trigonometría, ni a la Matemática, ni al primer curso de Bachillerato. Es posible, y de hecho queda abierto como vía para un futuro trabajo, utilizar imágenes en otras áreas de la Matemática como ya hemos mostrado brevemente en el capítulo introductorio (ver la Figura 1.4). Tampoco debe nuestro lector ceñirse al campo de la Matemática cuando se haga alusión al pensamiento visual fuera de este trabajo. Otras ramas, propias de ciencias o humanidades, admiten de una forma natural este tipo de razonamiento. En lo que respecta al curso al que deberían pertenecer los alumnos, se debe señalar que el rango es ampliamente variado, barriendo desde las primeras etapas escolares y llegando hasta los propios estudios universitarios. En este sentido recomendamos al lector [23, 24, 7, 8, 9, 10, 28, 49, 22].

En cualquier escenario en el que la actual propuesta vaya a ser llevada a la práctica se deberá seguir, eso sí, la normativa que regule los oportunos estudios. En el caso de este trabajo la normativa es la de [1] y todos los documentos que de esa Ley orgánica se derivan.

3.3. Teorías del aprendizaje visual

En el habla común solemos emplear la palabra visualización para referirnos al acto de ver. La visualización que hemos tratado hasta ahora en este documento difiere de esa primera acepción. Aquí, el cerebro juega un papel primordial, ya que es el encargado de interpretar lo que percibe el sistema visual con una capacidad de adaptación y memoria extraordinarias. La experiencia y los conocimientos previos del individuo sobre el objeto de la visualización son por tanto de gran ayuda para que el proceso se realice de un modo correcto.

Esta interpretación intrínseca y subjetiva de cada persona hace complicado el estudio teórico de la visualización. La principal cuestión, ya presente en [26], es si nuestro cerebro procesa la información de carácter visual del mismo modo que la de carácter verbal. A día de hoy no hay unanimidad en la respuesta y existe una línea activa de investigación al respecto. Sin embargo, lo que sí parece claro es que la visualización combinada con otros medios, por ejemplo de tipo lingüístico, es una herramienta que proporciona grandes beneficios en el aprendizaje.

En esta sección damos una breve explicación biológica de cómo funciona el sistema visual de un ser humano, aportamos una definición de lo que se entiende por visualización en matemáticas y exponemos tres grandes teorías del aprendizaje visual.

3.3.1. El funcionamiento del sistema visual

El sistema visual forma parte del sistema nervioso central y es el responsable de procesar los estímulos visuales que nos rodean. Los principales órganos involucrados en él son el ojo y el cerebro. Su funcionamiento, a grandes rasgos, es el siguiente: la información visual atraviesa a modo de luz la córnea del ojo, que es la encargada de proteger la estructura ocular de los agentes externos. Tras esto, la información llega a la zona del iris y la pupila. El iris regula la intensidad de luz y la pupila es el lugar que conecta la córnea con el cristalino. En este último, la información visual se invierte verticalmente y se proyecta a lo largo del cuerpo vítreo hasta la retina, compuesta de varias capas donde se encuentran los fotorreceptores de luz. Los más importantes son los bastones, responsables de la visión nocturna y de los tonos blancos y negros, y los conos, responsables de la percepción de los colores. Los fotorreceptores generan un impulso eléctrico que pasa a los axones del nervio óptico y se transmite al cerebro. El proceso finaliza en el área 17 de Brodmann (lóbulo occipital) donde el cerebro endereza la imagen y la interpreta (ver Figura 3.1).

De esta forma, el proceso de visualización puede dividirse en tres fases:

1. Objeto visual: Se presenta el recurso visual (objeto real, imágenes, animaciones, etc.) al individuo.

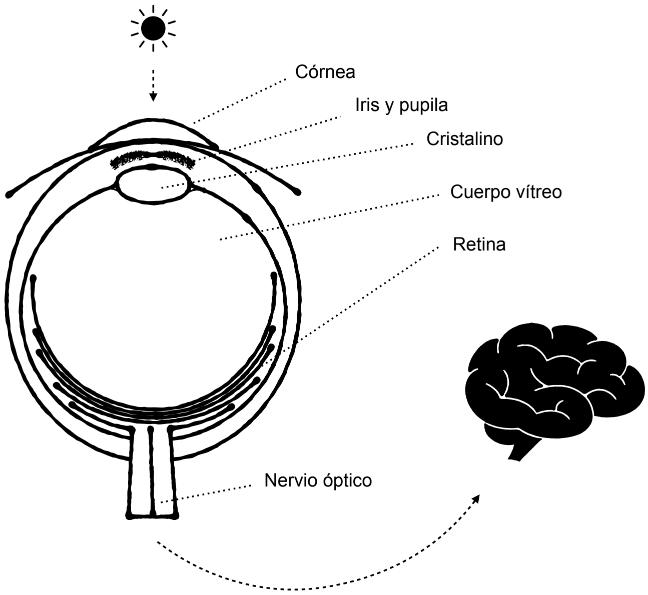

Figura 3.1: Esquema del funcionamiento del sistema visual. *(Fuente: Elaboración propia)*

2. Introspección del objeto: El individuo crea mentalmente un objeto que alude al objeto visual que ha visto tratando que haya similitud entre ambos.

3. Interpretación: El individuo interpreta la imagen que su mente ha creado del objeto.

El proceso que sigue la información hasta el cerebro se conoce con bastante precisión. Cómo manipula y organiza el cerebro esa información (es decir, cómo aprendemos) pertenece todavía a la investigación científica y es exactamente el tema central que tratan las teorías del aprendizaje visual del siguiente apartado.

3.3.2. Tres teorías del aprendizaje visual

Hasta ahora no hemos dado una definición de lo que se entiende por visualización en matemáticas. Lo cierto es que en la literatura existen una gran cantidad de definiciones (ver [44, Tabla 3.2]). Aquí hemos seleccionado la definición que se da en [23]:

> «Los expertos poseen imágenes visuales, modos intuitivos de percibir los conceptos y métodos, de gran valor y eficacia en su trabajo creativo y en su dominio del campo en que se mueven. Mediante ellos son capaces de relacionar, de modo muy versátil y variado, constelaciones frecuentemente muy complejas de hechos y resultados de su teoría y a través de tales redes significativas son capaces de escoger, de manera natural y sin esfuerzo, los modos de ataque más eficaces para resolver los problemas con que se enfrentan.
>
> »Las ideas básicas del análisis elemental, por ejemplo, orden, distancia, operaciones entre números, nacen de situaciones bien concretas y visuales. Todo experto conoce la utilidad de atender a tal origen concreto cuando quiere manejar con destreza los objetos abstractos correspondientes. Lo mismo sucede con otras partes aparentemente más abstractas de la matemática.
>
> »Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denominamos visualización en matemáticas.»

En los años ochenta y noventa del pasado siglo ya había un consenso entre los expertos de que el aprendizaje visual producía beneficios en el estudiante. Sin embargo, no existían demasiados fundamentos teóricos que sustentaran esta afirmación. A medida que la investigación sobre esta cuestión se ha ido acrecentando, ha surgido un marco teórico que, si bien sigue estando incompleto, puede ser de gran utilidad a la hora de utilizar técnicas visuales en el aprendizaje. En este apartado en concreto seguiremos las tres teorías que se exponen en [52].

1. Teoría de codificación dual: esta teoría fue introducida por el profesor de Psicología A. Paivio en [43]. La principal hipótesis es que el sistema cognitivo procesa de forma separada la información visual y la lingüística. La primera de ellas se

organiza de manera simultánea mientras que la segunda se concatena en una cadena por orden de llegada. Esto implica que la velocidad de procesamiento de la información visual es mayor que la lingüística. A pesar de esta división, el modelo reconoce la existencia de interconexiones entre ambos sistemas de procesamiento. De esta forma es posible que la información visual se transforme en lingüística y viceversa. Esto sugiere que el uso combinado de ambas en el aprendizaje supone un mejor almacenamiento en la memoria a largo plazo de los estudiantes.

2. Hipótesis del argumento visual: el punto de partida de esta teoría puede establecerse con el trabajo del profesor R. Waller [54] donde se utiliza el término «argumento visual» para referirse al modo en que las imágenes transmiten conocimiento. Esta corriente sostiene que las características visoespaciales de la información visual demandan un menor número de transformaciones cognitivas y que en consecuencia se recarga en menor medida la memoria de trabajo del sujeto. Además, este tipo de información requiere procesos automáticos (como por ejemplo la percepción) para obtener datos relevantes. De hecho, las propias imágenes actúan como un sistema cognitivo externo.

3. Hipótesis de la retentiva conjunta: es una teoría muy relacionada con las dos anteriores y fue elaborada por L. C. Caterino, W. A. Kealy, R. W. Kulhavy y W. A. Stock con los mapas como principales objetos de visualización [34, 13]. Al igual que en la teoría de codificación dual, se asume que el sistema cognitivo procesa de forma separada la información visual y la lingüística. Por otro lado, se defiende que los mapas presentan la información de tal modo que al individuo no le supone una alta demanda de procesos en la memoria.

3.4. Pautas para el diseño de imágenes

Por lo general cualquier dibujo, diagrama, esquema, etc. que mejore el aprendizaje de contenidos es considerado como beneficioso para el alumnado. Obviamente uno no puede adivinar a priori si los recursos que ha elaborado cumplen este requisito, ya que no hay una pauta universal que asegure su éxito. Pero existen algunas indicaciones y consejos en la literatura que pueden ayudar a la hora de enfrentarse a la no tan elemental tarea del diseño de estas estructuras gráficas. Pasamos a enumerarlas señalando antes que las referencias que se han utilizado aquí son [45], [44] y [26, p. 98 y 99].

Una primera cuestión a tratar a la hora de elaborar una figura para acompañar a un problema matemático es el grado de exactitud que han de presentar sus elementos. Por ejemplo, si el problema sugiere trazar una línea recta, ¿debemos trazar con exactitud esa línea sin desviarnos ni un ápice? Lo cierto es que todo es muy relativo a la situación particular en la que nos movamos, pero por lo general no es necesario un alto grado de exactitud, siempre que no acabemos por hacer una curva de lo que debía ser una recta.

Muy ligada a lo anteriormente expuesto se encuentra la duda acerca de si hay que realizar los dibujos a mano alzada o bien utilizando los materiales y recursos apropiados. La representación con ayuda de estos últimos nos llevará a obtener un alto grado de exactitud en los elementos de nuestra figura, y además puede invitar a la formulación de conjeturas acerca de las relaciones entre ellos. El precio a pagar será el tiempo empleado en la tarea. En ocasiones es mucho más práctico un dibujo a mano sobre el cual razonar. La pega en este caso es que las imprecisiones en los elementos pueden conducir a razonamientos erróneos. Para evitar esto es recomendable no exagerar en exceso las características o detalles del problema. Imaginemos por ejemplo que tenemos que dibujar un triángulo cualquiera. Es deseable que su representación no invite a pensar que es rectángulo o isósceles. Resulta que el triángulo de ángulos 45°, 60° y 75° es el que «menos se parece» a uno rectángulo o a uno isósceles (ver [45, p. 106] para precisar sobre el significado de esa «no similitud»).

El orden en el que se van construyendo los elementos del diagrama del problema por lo general no es importante por lo que queda a elección del autor. Lo que sí es importante es que guarden las relaciones que indica el enunciado. Por ejemplo, si queremos presentar una figura en que un ángulo α está dividido en tres ángulos iguales, no vamos a comenzar dibujando el ángulo α, ya que la trisección no es posible en general con regla y compás. En su lugar comenzaremos dibujando un ángulo β convenientemente pequeño y lo transportaremos dos veces, de modo que quede construido un ángulo $\alpha = 3\beta$.

El correcto manejo de los colores, sus intensidades y técnicas de trazados discontinuos, suele proporcionar buenos resultados. Así, se pueden resaltar los elementos más importantes del problema, usar trazos más gruesos para determinadas líneas o representar con menor intensidad o de forma discontinua líneas secundarias. Con esto se capta y se dirige con mayor facilidad la atención del individuo.

El caso de modelos tridimensionales suele ser más complejo y en la mayoría de los casos más difícil de comprender por parte del estudiante. Aquí será conveniente valorar la introducción en el aula de construcciones con cartulinas, aunque sean elaboradas a mano, con las que el alumno puede interactuar y visualizar mejor las diferentes perspectivas (ver [30]).

Existen algunos estudios [19, 20, 27, 48] que muestran la repercusión que tiene en el aprendizaje la fidelidad de los recursos gráficos a la realidad de los objetos que representan. De estos trabajos se sigue que los recursos que mejor se ajustan a la realidad no son los más idóneos en el aprendizaje. Aquellos más reales conllevan la incorporación de muchos detalles poco relevantes que tienden a despistar al estudiante de la parte o partes esenciales.

Además, a ser posible hay que tratar de lograr que el alumno se identifique de algún modo con los recursos que se le presentan. Si éstos son cercanos en alguna medida a los gustos o aficiones del estudiante conseguiremos atraer su atención y habremos dado un paso importante para su aceptación.

Finalmente, ha de considerarse la incorporación de las nuevas tecnologías para facilitar la visualización de forma que beneficien el aprendizaje y no lo contrario. Con ellas se abren posibilidades, por ejemplo, de imágenes animadas con movimientos, o de entornos en los que el alumno puede interaccionar.

4. ESTADO DE LA CUESTIÓN

A finales del siglo pasado y principios de éste se ha podido apreciar una voluntad de considerar técnicas de visualización en las aulas. Son muchos los estudios que sugieren que el modelo de enseñanza basado en el rigor matemático debería virar ligeramente y dar cabida también a razonamientos de carácter más intuitivo[1]. Damos a continuación una breve panorámica de parte de la investigación que pone de manifiesto la situación actual de la visualización en el ámbito matemático.

Las ideas inclinadas hacia un alto formalismo y razonamiento lógico en la Matemática predominantes durante una buena parte de los siglos XIX y XX fueron perdiendo fuerza en la década de los ochenta. Las denominadas demostraciones sin palabras comenzaron a adquirir importancia gracias a la iniciativa de la *Mathematical Association of America*. En septiembre de 1975 la asociación publicó en su revista *Mathematics Magazine* un artículo de R. Isaacs que contenía dos imágenes relacionadas con la prueba del Teorema de Pitágoras y la trisección de un ángulo [31]. La gran aceptación del artículo y el cambio de directores en la editorial cuatro meses más tarde provocaron la creación de una columna de nombre *Proof Without Words* que incluía demostraciones visuales sin palabras.

En 1993, R. B. Nelsen, uno de los réferi de la revista, agrupó en [39] una colección de varias de las demostraciones sin palabras que había ido revisando a lo largo de los años. Estos «ejercicios visuales» aluden a campos tan diversos de la Matemática como la Geometría, el Álgebra o el Análisis matemático. A esta publicación le acompañarían más tarde otras dos [40, 41] con la misma filosofía. Estas tres obras se han convertido con el tiempo en clásicos de las demostraciones sin palabras y su autor es uno de los referentes en este campo (de hecho en estos últimos años ha elaborado otras obras [7, 8, 9, 10] sobre el pensamiento visual en colaboración con

[1] Por ejemplo, las fracciones, muchos problemas sencillos de Geometría analítica en el plano y en el espacio o teoremas clásicos del Análisis matemático como el Teorema de Weierstrass, el Teorema de Bolzano y el Teorema de Rolle admiten este tipo de razonamientos.

el matemático español C. Alsina).

Las demostraciones sin palabras son un claro ejemplo de apuesta por una enseñanza de las matemáticas en la que tiene cabida el razonamiento visual.

Los procesos mentales asociados a imágenes ya habían empezado a ser estudiados con detalle en el siglo XIX desde un punto de vista psicológico. La investigación de la visualización en el ámbito matemático comenzó a ser objeto de interés después de la apuesta de la *Mathematical Association of America* y rápidamente aparecieron estudios al respecto. Esta línea se vio reforzada por la aparición de las teorías constructivistas y la irrupción de las nuevas tecnologías en la sociedad. La colección de veinte artículos [15] es una referencia clásica que considera la relación que existe entre esas nuevas tecnologías y el pensamiento visual, haciendo énfasis en la necesidad de potenciar este último entre los estudiantes.

Se considera que [12] es buen punto para situar la aparición de un interés significativo en el estudio de la visualización en la educación matemática. Allí se indica la pobre literatura hasta el momento en este ámbito y se hace un repaso de los pocos artículos que tratan los beneficios y los inconvenientes de las imágenes en el aprendizaje. También se insta a investigar la visualización más allá de la resolución de problemas y se afirma que es posible entrenar el pensamiento visual en los alumnos. Posteriormente aparecerían muchos trabajos dedicados a estas cuestiones. En [16] se confronta de manera brillante el modelo formalista comentado arriba y el modelo que relaja esta premisa considerando otros tipos de vías hacia el conocimiento matemático. Además el artículo incluye varios ejemplos interesantes encasillados en las áreas de Geometría plana y Análisis matemático y otros propios de resultados gráficos de ordenadores que tienen un modo de organización determinado. Para el primero de los grupos se trata de mostrar de manera visual que no es posible rellenar un círculo de radio fijo con un número finito de círculos de radio menor situados dentro del primero y tal que no se solapen entre ellos. Como ejemplo dentro del Análisis matemático se menciona que los extremos de una función «apropiada» se alcanzan en los puntos de derivada nula. En el último grupo se incluyen los fractales.

Un extenso resumen de toda la investigación sobre visualización en matemáticas (hasta 2006) aparece en [47] donde el lector puede encontrar interesantes referencias a trabajos que tratan sobre este tema. Este artículo puede entenderse como una actualización de [18], publicado quince años antes, en el que se recopilan los trabajos en visualización matemática de finales del siglo pasado. Para una aproximación a la visualización considerando la Ciencia en general y no solo la Matemática recomendamos consultar [44, 32].

En España se comienzan a observar los primeros artículos sobre la importancia de la visualización matemática hacia el año 2000, casualmente declarado Año Mundial de las Matemáticas. En la introducción de [23], M. de Guzmán se ocupa de la visualización y su papel en la Matemática. La referencia resulta de especial interés para aquellos interesados en el área del Análisis matemático. El artículo [24] del mismo autor es una breve adaptación en inglés de ese libro. En [37] se indica la creciente tendencia a utilizar la visualización como un apoyo a la enseñanza en áreas tan diversas como el Análisis matemático, el Álgebra o la Geometría y, aunque está dirigido al estudio de la enseñanza universitaria, en [22] se pueden ver muchas opiniones de expertos promoviendo el uso de la visualización en las aulas de matemáticas.

Como se ha señalado, en los últimos años toda la Matemática se ha visto influenciada por los nuevos recursos tecnológicos. La visualización no ha sido menos y entre la literatura se pueden encontrar varios trabajos en este sentido (ver Sección 5.8). La propia *Mathematical Association of America* consideró la creación de una nueva columna titulada *Proof without Words 2.0* para los formatos digitales de su revista. En ella aparecerían pruebas sin palabras animadas diseñadas por ordenador [17].

5. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN DIDÁCTICA

Este capítulo recoge el grueso de la propuesta educativa que se persigue en este trabajo. La primera sección expone los objetivos didácticos que se pretenden lograr y la segunda recoge las competencias clave que el alumno potenciará. La tercera sección es la propuesta en sí y es allí donde se incluyen las figuras relacionadas con identidades trigonométricas y los teoremas del seno y del coseno que servirán para interiorizar y poner a prueba las capacidades de visualización matemática del alumnado. Las secciones posteriores se dedican a tratar, respectivamente, el problema de la diversidad en las aulas, una posible metodología a seguir por el profesor, el desarrollo de la propuesta, posibles formas de evaluación del método de trabajo y la incorporación de las nuevas tecnologías.

5.1. Objetivos didácticos de la propuesta

En el Capítulo 2 se expusieron los objetivos que se siguen del currículo que establece [5] para el primer curso de Bachillerato de Ciencias. Esta sección contiene los objetivos didácticos que se desean alcanzar con esta propuesta de intervención. Para su elaboración hemos repasado los puntos del Capítulo 2 que hacen especial alusión a las identidades trigonométricas y a los teoremas del seno y del coseno y los hemos acompañado de otros objetivos que nos parecen del mismo modo importantes a la hora de poner en práctica esta propuesta en el aula y que no se mencionan en la normativa legal:

1. Conocer y saber trabajar con las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

2. Conocer y saber trabajar con las fórmulas para las razones trigonométricas de la suma y la diferencia de ángulos.

3. Conocer y saber trabajar con las fórmulas para las razones trigonométricas del ángulo doble y mitad.

4. Conocer y saber trabajar con las fórmulas para las transformaciones trigonométricas y los teoremas del seno y del coseno.

5. Acercarse a las demostraciones matemáticas mediante el concepto de demostración geométrica.

6. Adquirir cierta autonomía en la comprensión de argumentos matemáticos con la ayuda de demostraciones geométricas y ser capaz de modificarlas ligeramente para probar resultados diferentes.

7. Hacer uso posterior de las identidades trigonométricas y de los teoremas del seno y del coseno en otros ámbitos de la Matemática.

8. Emplear razonamientos visuales en el aprendizaje de identidades trigonométricas y de los teoremas del seno y del coseno en lugar de técnicas memorísticas.

9. Sentir curiosidad por la Trigonometría, las identidades trigonométricas, los teoremas del seno y del coseno y la Matemática.

10. Desarrollar y potenciar la intuición y la creatividad.

Al igual que en el Capítulo 2, hemos tenido en cuenta otros objetivos didácticos de carácter transversal necesarios para la formación integral del alumno:

1. Adquirir determinados hábitos en la expresión y escritura de contenido matemático mostrando el rigor propio de esta ciencia y participar en debates de carácter científico.

2. Establecer e interpretar las conexiones entre la Trigonometría y el mundo que nos rodea.

3. Valorar las aplicaciones de la Trigonometría y de la Matemática en general, y ser consciente de su importancia.

4. Practicar la autocrítica de forma positiva y reflexionar sobre la actividad de uno mismo.

5.2. Competencias clave

La entrada en vigor de [1] supuso un cambio de paradigma en el modelo educativo español. Mientras que anteriormente el eje de la enseñanza eran los contenidos, el cambio trasladó el foco a lo que se denominan competencias. Encontramos una definición de las mismas en [3], que a su vez cita la definición dada por el programa de la OCDE *DeSeCo* (Definition and Selection of Competencies) de 2003, que define competencia en el ámbito educativo como la capacidad de responder a demandas complejas y llevar a cabo tareas diversas de forma adecuada. Así, la competencia supone una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones, y otros componentes sociales y de comportamiento, que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz.

Las competencias clave que se recogen en [3] y que están presentes en los currículos de los Decretos [4] y [5] son siete: competencia lingüística, competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, competencia digital, competencia para aprender a aprender, competencias sociales y cívicas, sentido de iniciativa y espíritu emprendedor y conciencia y expresiones culturales.

De entre todas debemos resaltar la competencia matemática como la predominante en esta propuesta por razones obvias. Son tangenciales a ella las competencias básicas en ciencia y tecnología y la competencia digital, por la clara adaptabilidad de la propuesta a ser representada por modelos físicos y mediante el uso de las nuevas tecnologías. Por último, la necesidad de interpretación de las imágenes que se presenten para su correcta comprensión, desarrolla de forma sustancial la competencia para aprender a aprender, y mejora la reflexión del alumno sobre su propio razonamiento.

5.3. Visualización de identidades trigonométricas

Como hemos dicho al principio de este capítulo, esta sección conforma la propuesta educativa que presentamos en este trabajo. La idea principal es que los alumnos, que ya habrán dado los aspectos básicos de Trigonometría en cuarto de la ESO (ver el Capítulo 2), se apoyen en la visualización matemática para aprender y comprender mejor las identidades trigonométricas y los teoremas del seno y del coseno que aparecen en los contenidos curriculares del primer curso de Bachillerato de Ciencias. De esta forma la visualización debe entenderse como un complemento o ayuda al estudiante de cara al aprendizaje y nunca como un sustituto de las técnicas habituales del aula.

La clave de esta propuesta está en las figuras que presentan demostraciones geométricas casi «sin palabras» de algunas relaciones entre razones trigonométricas. La gran mayoría de ellas han sido extraídas (en ocasiones con ligeras modificaciones) de [35, 39, 40, 41] y otras han sido elaboradas de forma original, aunque la amplia literatura relativa a estos contenidos contendrá con seguridad todas ellas. Como se podrá observar la creación de estos elementos visuales se ha hecho con la ayuda de un ordenador, intentando seguir las pautas de la Sección 3.4, aunque en el apéndice (ver el final del documento justo antes de la Bibliografía) se han incluido las mismas figuras hechas a mano por este autor. Esperemos que, aunque sean imperfectas, sirvan para reflejar la independencia entre nuestra propuesta y las nuevas tecnologías. Los recursos clásicos lápiz y papel, o en su caso tiza y pizarra, son suficientes para llevar la propuesta al aula.

Como hemos tratado de resaltar en la introducción de esta memoria, las demostraciones geométricas no son demostraciones como tales, y esto debe quedar bien claro a los alumnos. Será frecuente observar faltas de estudio de casos o de restricciones en los rangos de valores de los parámetros en las figuras consideradas. No obstante, será conveniente que el alumno sepa desligarse de estos hechos. Además, es interesante que vea la posibilidad de probar varias identidades trigonométricas con una sola figura (salvo pequeñas modificaciones). Para no ser demasiado repetitivos en este trabajo, hemos tratado de mostrar varias técnicas en las demostraciones geométricas, a fin de que el profesor tenga a mano un amplio abanico de posibilidades de elección. También observará el lector que el nivel de dificultad varía de unas demostraciones a otras, por lo que es responsabilidad del docente seleccionar cuáles de ellas utilizará en clase.

El formato de presentación elegido en esta memoria es diferente al que se seguirá en clase. Aquí, para cada identidad trigonométrica o teorema hemos incluido un enunciado, una figura y una explicación de la demostración geométrica. El enunciado informará al lector de a qué identidad o teorema se refiere la figura en cuestión. La figura es la demostración sin palabras. Por completitud de la propuesta y para facilitar la lectura hemos creído conveniente incluir una explicación detallada de la construcción e interpretación de cada figura. En la puesta en práctica omitiríamos este procedimiento y primero presentaríamos la figura correspondiente a la clase. Con la participación de los alumnos y la ayuda del profesor se interpretaría matemáticamente la imagen. Por último se escribiría la identidad o el teorema que se ha deducido (ver la Sección 5.6 para más detalles sobre el desarrollo de la propuesta en clase).

La notación seguida es bastante estándar. Cabe destacar que los ángulos están expresados en radianes (ver el Capítulo 2 donde uno de los objetivos del currículo es expresar y manejar correctamente ángulos en radianes) y que las unidades para los elementos geométricos se consideran genéricas y no se escriben.

Para comenzar, damos varios resultados que serán de utilidad para las demostraciones geométricas de las identidades trigonométricas y de los teoremas. Omitiremos hacer referencia explícita al primero de ellos ya que lo usaremos con frecuencia.

Proposición 5.1 (Suma de los ángulos interiores de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a* π*.*

Demostración geométrica. Sea ABC un triángulo cualquiera. Prolonguemos el lado AB hasta un punto A' más allá del punto B y tracemos la recta BB' paralela a AC

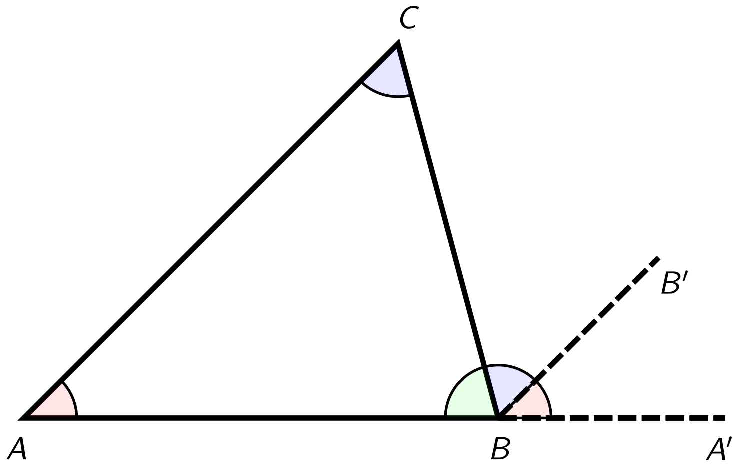

Figura 5.1: Demostración visual de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

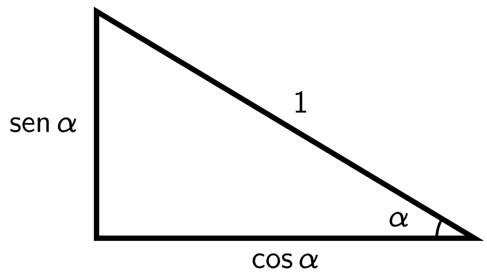

Figura 5.2: Demostración visual de la identidad fundamental de la Trigonometría.

que pasa por B. Por el paralelismo, se tiene la igualdad de ángulos $\angle CAB = \angle B'BA'$ y $\angle ACB = \angle CBB'$. Queda claro entonces que los tres ángulos del triángulo suman uno llano (ver Figura 5.1). □

Proposición 5.2 (Identidad fundamental de la Trigonometría)**.** *Para todo ángulo α se cumple que*

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \tag{5.1}$$

Demostración geométrica. Construyamos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida 1 y donde uno de sus ángulos es igual a α (ver Figura 5.2). El lado opuesto a α medirá $\operatorname{sen} \alpha$ y el contiguo $\cos \alpha$. Aplicando el Teorema de Pitágoras (Teorema 1.1)

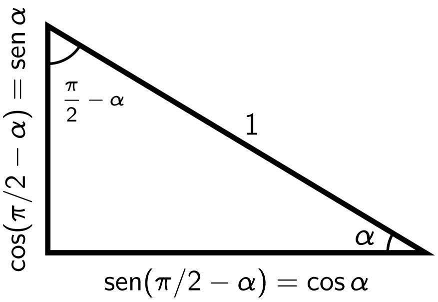

Figura 5.3: Demostración visual de que $\operatorname{sen}(\pi/2-\alpha)=\cos\alpha$ y que $\cos(\pi/2-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$.

llegamos a

$$1=\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha,$$

que es precisamente (5.1). □

Proposición 5.3. *Para todo ángulo α se cumple que*

$$\operatorname{sen}(\pi/2-\alpha)=\cos\alpha \tag{5.2}$$

y

$$\cos(\pi/2-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha. \tag{5.3}$$

Demostración geométrica. Construyamos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida 1 y donde uno de sus ángulos es igual a α (ver Figura 5.3). El ángulo restante del triángulo debe medir $\pi-\pi/2-\alpha=\pi/2-\alpha$. Notemos ahora que el cateto contiguo al ángulo α coincide con el cateto opuesto al ángulo $\pi/2-\alpha$. Por lo tanto, se debe cumplir (5.2).

De manera similar, el cateto opuesto al ángulo α coincide con el cateto contiguo al ángulo $\pi/2-\alpha$ y así se concluye (5.3). □

Proposición 5.4 (Seno de la suma)**.** *Para cualesquiera dos ángulos α y β se cumple que*

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta. \tag{5.4}$$

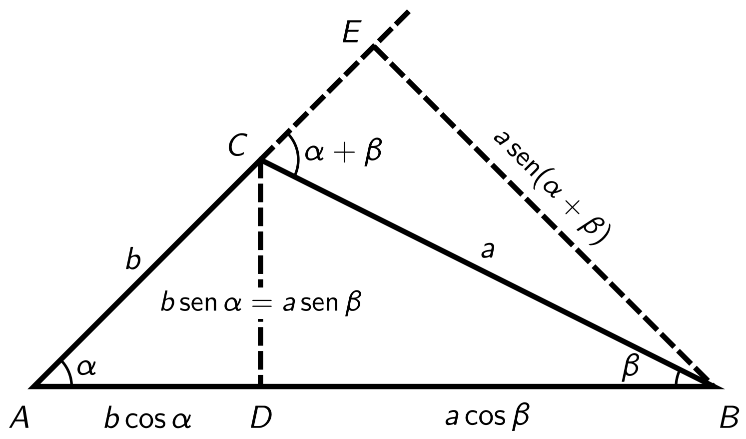

Figura 5.4: Demostración visual del seno de la suma.

Demostración geométrica. Construyamos un triángulo ABC en el que $\angle ACB > \pi/2$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, la longitud del lado AC sea b y la longitud del lado BC sea a (ver Figura 5.4). La altura del triángulo desde el vértice C, que corta a AB en D, medirá por un lado $b\,\mathrm{sen}\,\alpha$ si atendemos al triángulo ACD, y por otro $a\,\mathrm{sen}\,\beta$ si nos fijamos en el triángulo BCD. Notemos también que $AD = b\cos\alpha$ y que $BD = a\cos\beta$. Prolonguemos ahora el lado AC más allá del punto C y denotemos por E la proyección ortogonal del punto B sobre AC. Es claro que $\angle BCE = \alpha+\beta$ y por tanto $EB = a\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)$. De esta forma, el área del triángulo ABC será por un lado igual a

$$\frac{ab\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}{2}$$

y por otro igual a la suma de las áreas de los triángulos ACD y BCD que son, respectivamente,

$$\frac{ab\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}{2} \quad \text{y} \quad \frac{ab\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha}{2}.$$

Igualando áreas llegamos a que

$$\frac{ab\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}{2} = \frac{ab\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta + ab\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha}{2}.$$

Simplificando se obtiene (5.4). □

Proposición 5.5 (Coseno de la suma)**.** *Para cualesquiera dos ángulos α y β se cumple que*

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta. \qquad (5.5)$$

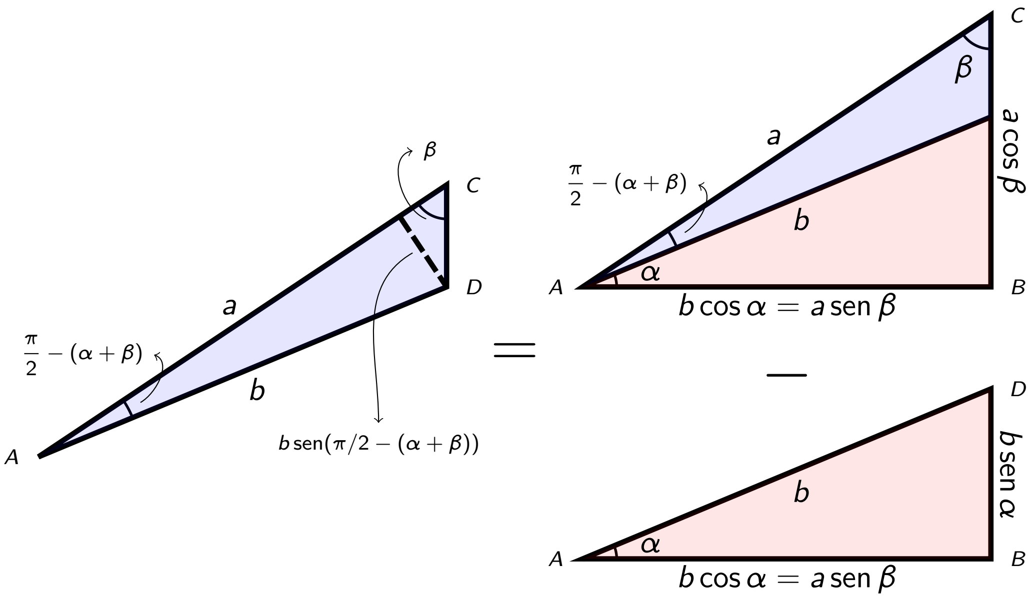

Figura 5.5: Demostración visual del coseno de la suma.

Demostración geométrica. Construyamos un triángulo ABC rectángulo en el vértice B, en el que la hipotenusa mida a y el ángulo en C mida β (ver Figura 5.5). Dividamos el ángulo en el vértice A por una ceviana AD de tal forma que el ángulo $\angle DAB = \alpha$ ($\angle CAD = \pi/2 - (\alpha + \beta)$). Si $AD = b$, por una parte, $AB = b \cos \alpha$ atendiendo al triángulo ABD y por otra, $AB = a \operatorname{sen} \beta$ considerando el triángulo ABC. También, $BD = b \operatorname{sen} \alpha$ y $BC = a \cos \beta$. La altura del triángulo ACD desde el vértice D medirá $b \operatorname{sen}(\pi/2 - (\alpha + \beta))$ o lo que es lo mismo $b \cos(\alpha + \beta)$ (ver Figura 5.3).

Entonces, el área del triángulo ADC se puede calcular directamente o como la diferencia de las áreas de los triángulos ABC y ABD. Es decir,

$$\frac{ab \cos(\alpha + \beta)}{2} = \frac{ab \cos \alpha \cos \beta}{2} - \frac{ab \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha}{2},$$

que al simplificar se convierte en (5.5). □

Proposición 5.6 (Tangente de la suma)**.** *Para cualesquiera dos ángulos α y β, $\alpha + \beta \neq (2k+1)\pi/2$, k entero, se cumple que*

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \tag{5.6}$$

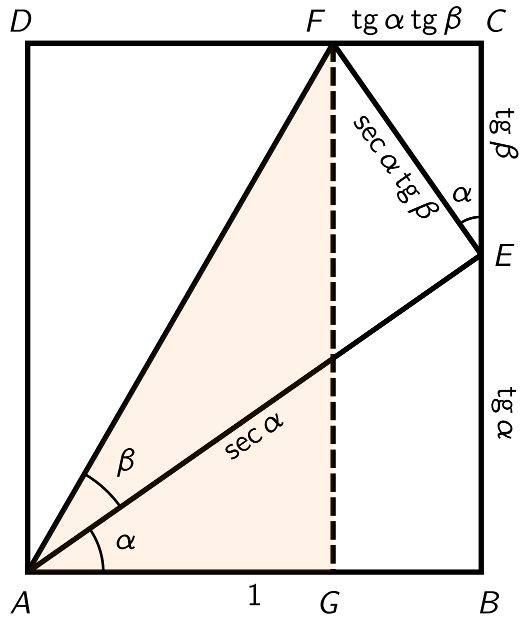

Figura 5.6: Demostración visual de la tangente de la suma.

Demostración geométrica. Construyamos un triángulo rectángulo ABE de hipotenusa AE y donde $AB = 1$ y $\angle BAE = \alpha$. Se tendrá que $AE = \sec\alpha$ y $BE = \operatorname{tg}\alpha$. Construyamos otro triángulo rectángulo AEF apoyado sobre el lado AE de hipotenusa AF y donde $\angle EAF = \beta$. De este modo se determina un rectángulo $ABCD$ que pasa por los puntos E y F (ver Figura 5.6). Notemos que $EF = \sec\alpha\operatorname{tg}\beta$ y que $\angle CEF = \alpha$. Así, $CF = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$ y $EC = \operatorname{tg}\beta$. Por último tracemos una paralela a BC que pase por F y que cortará a AB en G. Atendiendo al triángulo AFG obtenemos (5.6). □

Proposición 5.7 (Seno de la resta)**.** *Para cualesquiera dos ángulos* α *y* β *se cumple que*

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta. \tag{5.7}$$

Demostración geométrica. Construyamos un triángulo ABC rectángulo de hipotenusa AC igual a 1 y con $\angle BAC = \alpha$. Es claro que $AB = \cos\alpha$. Dividamos el ángulo α en dos por una ceviana AD de modo que $\angle BAD = \beta$ (ver Figura 5.7). Si $AD = x$ entonces $BD = x\operatorname{sen}\beta$. Proyectemos ortogonalmente ahora el punto D sobre el lado AC. Denotemos por E la proyección y por y la longitud del segmento DE. Observe-

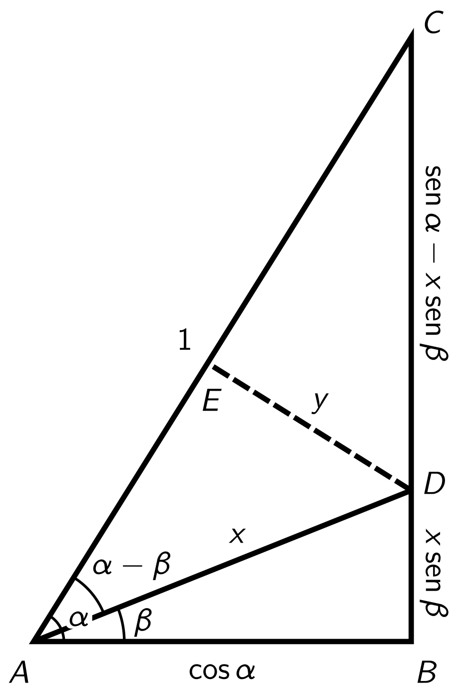

Figura 5.7: Demostración visual del seno de la resta.

mos que $\angle DCE = \pi/2 - \alpha$ y que además $CD = \operatorname{sen}\alpha - x \operatorname{sen}\beta$. Entonces, para el triángulo ABD tenemos que

$$x = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Por otro lado, para el triángulo ADE obtenemos que

$$y = x \operatorname{sen}(\alpha - \beta).$$

Por último, para el triángulo CDE se cumple que

$$y = \cos\alpha(\operatorname{sen}\alpha - x \operatorname{sen}\beta),$$

donde hemos aplicado que $\operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$ (ver Figura 5.3). Juntando todo llegamos a que

$$\frac{\cos\alpha \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos\beta} = \cos\alpha\left(\operatorname{sen}\alpha - \frac{\cos\alpha \operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}\right),$$

que simplificando es precisamente (5.7). $\square$

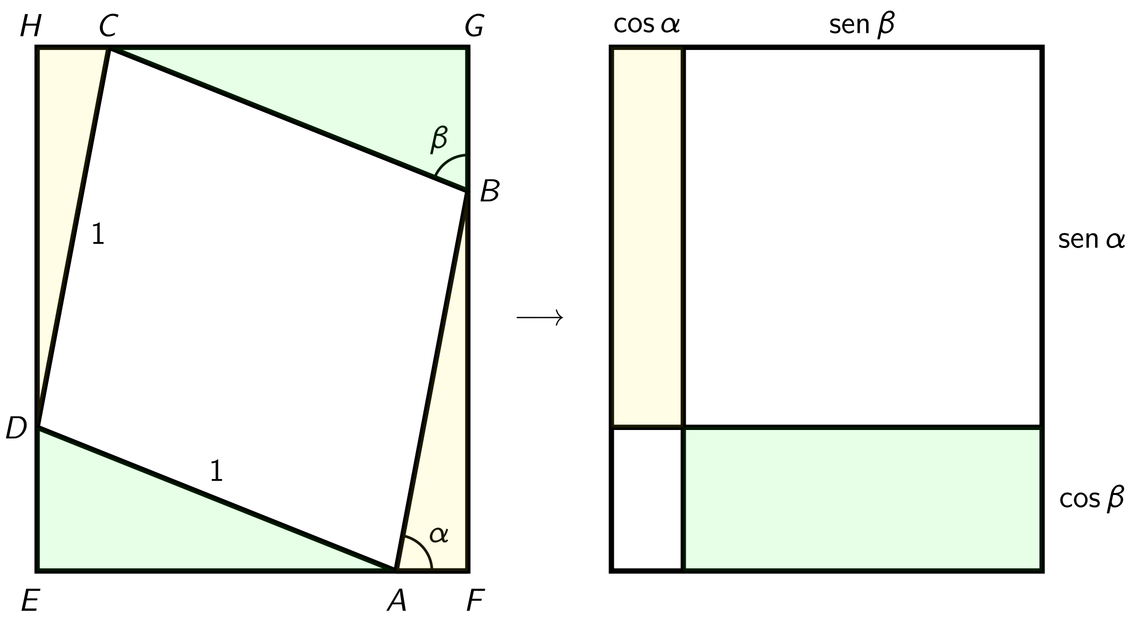

Figura 5.8: Demostración visual del coseno de la resta.

Proposición 5.8 (Coseno de la resta)**.** *Para cualesquiera dos ángulos α y β se cumple que*

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta. \tag{5.8}$$

Demostración geométrica. Lo mejor sería que la Figura 5.8 se explicase por sí misma. En la figura de la izquierda, $ABCD$ es un rombo de lado 1 y las rectas EF y HG son dos rectas paralelas pasando por los vértices opuestos A y C, respectivamente, que son «de soporte» del rombo (es decir, que no contienen puntos interiores del rombo), de modo que $\angle BAF = \alpha$ y $\angle CBG = \beta$.

Las rectas EH y FG son rectas de soporte perpendiculares a las anteriores pasando por los vértices D y B, respectivamente, de modo que el paralelogramo $FGHE$ es un rectángulo. Los triángulos DEA y BGC son congruentes, lo mismo que los triángulos AFB y CHD.

El área del rombo $ABCD$ es

$$\operatorname{sen}\angle BAD = \operatorname{sen}(\pi/2 - (\alpha - \beta)) = \cos(\alpha - \beta),$$

donde la última igualdad es cierta por la Proposición 5.3.

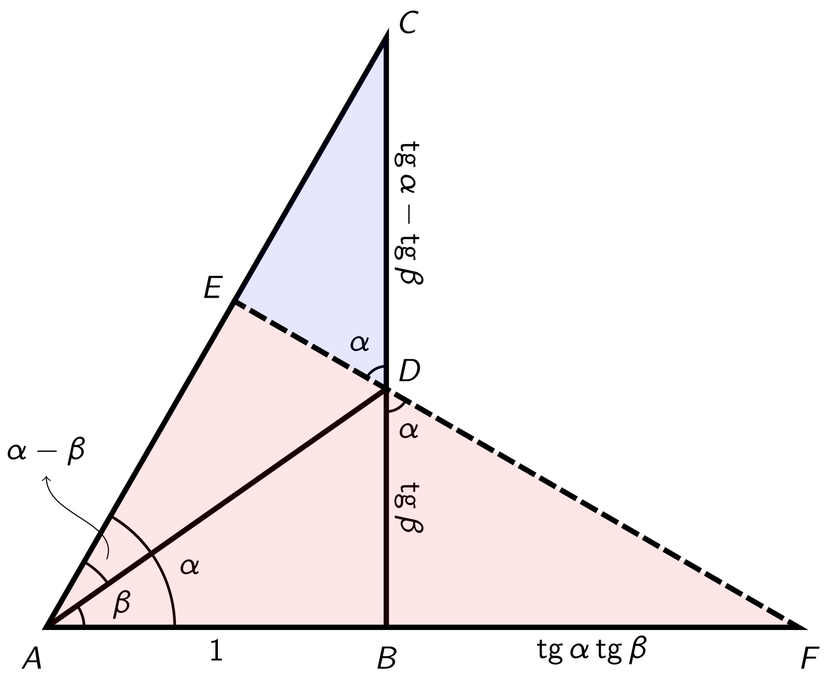

Figura 5.9: Demostración visual de la tangente de la resta.

En la Figura 5.8, derecha, se ha descompuesto el mismo rectángulo $EFGH$ en piezas rectangulares, de las cuales el área de las dos piezas que equivalen al rombo $ABCD$ es, como se ve inmediatamente, $\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$. $\square$

Proposición 5.9 (Tangente de la resta). *Para cualesquiera dos ángulos α y β, $\alpha-\beta \neq (2k+1)\pi/2$, k entero, se cumple que*

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Demostración geométrica. Sea ABC un triángulo rectángulo de hipotenusa AC, con $AB = 1$ y con $\angle BAC = \alpha$. Dividamos α en dos ángulos por una ceviana AD, de modo que $\angle BAD = \beta$. Notemos que $BD = \operatorname{tg}\beta$ y $CD = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$. Sea E la proyección ortogonal del punto D sobre el lado AC. La recta DE cortará a AB en F (ver Figura 5.9). De este modo, $\angle CDE = \angle BDF = \alpha$ y entonces $BF = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$. Como los triángulos rectángulos AEF y DEC son semejantes, $AF/AE = CD/DE$. Entonces,

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{DE}{AE} = \frac{CD}{AF} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

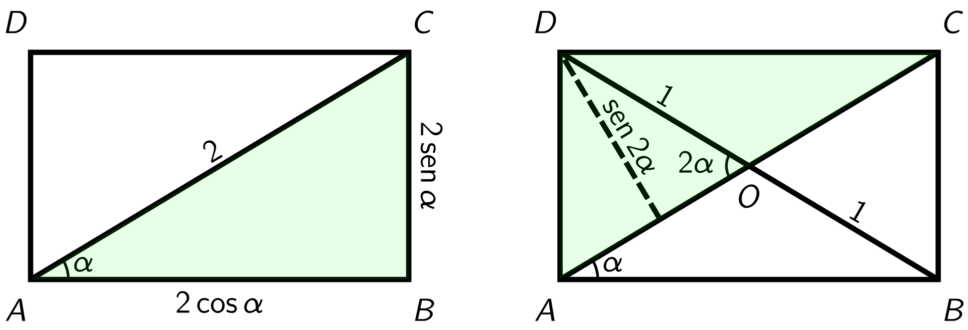

Figura 5.10: Demostración visual del seno del ángulo doble.

como queríamos demostrar. □

Proposición 5.10 (Seno del ángulo doble). *Para todo ángulo α se cumple que*

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha. \tag{5.9}$$

Demostración geométrica. Sea un rectángulo $ABCD$ con diagonales de longitud 2 y tal que $\angle BAC = \alpha$ (ver Figura 5.10). Es claro que $AB = 2\cos\alpha$ y que $BC = 2\operatorname{sen}\alpha$. Puesto que las diagonales de todo rectángulo se cortan en su punto medio O, también se tiene que $BO = OD = 1$ y que $\angle AOD = 2\alpha$. Así, la altura del triángulo $ACD = \operatorname{sen} 2\alpha$.

Por lo tanto, como los triángulos ABC y ACD son iguales, han de tener la misma área y entonces

$$\frac{4\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha}{2} = \frac{2\operatorname{sen} 2\alpha}{2},$$

que es equivalente a (5.9). □

Proposición 5.11 (Coseno del ángulo doble). *Para todo ángulo α se cumple que*

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1. \tag{5.10}$$

Demostración geométrica. Sea un triángulo ABC isósceles con $AC = BC = 1$ y con $\angle BAC = \angle ABC = \alpha$. La base AB medirá $2\cos\alpha$. Construyamos sobre ella un rectángulo $ABDE$ de altura $\cos\alpha$ (ver Figura 5.11). Del mismo modo, construyamos un paralelogramo $ABFG$ sobre AB con $AG = BF = 1$ y con ángulos interiores

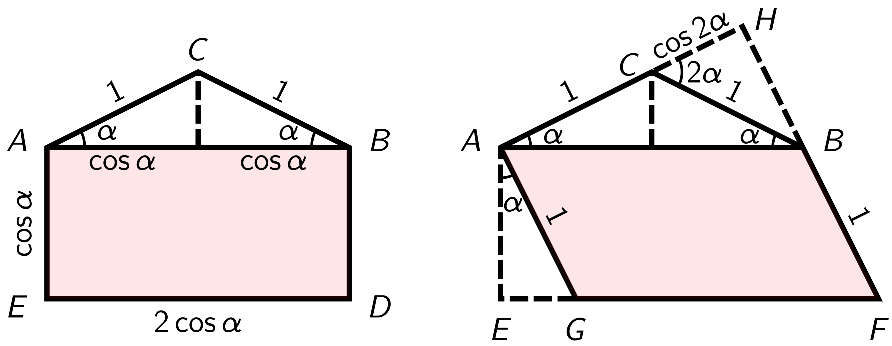

Figura 5.11: Demostración visual del coseno del ángulo doble.

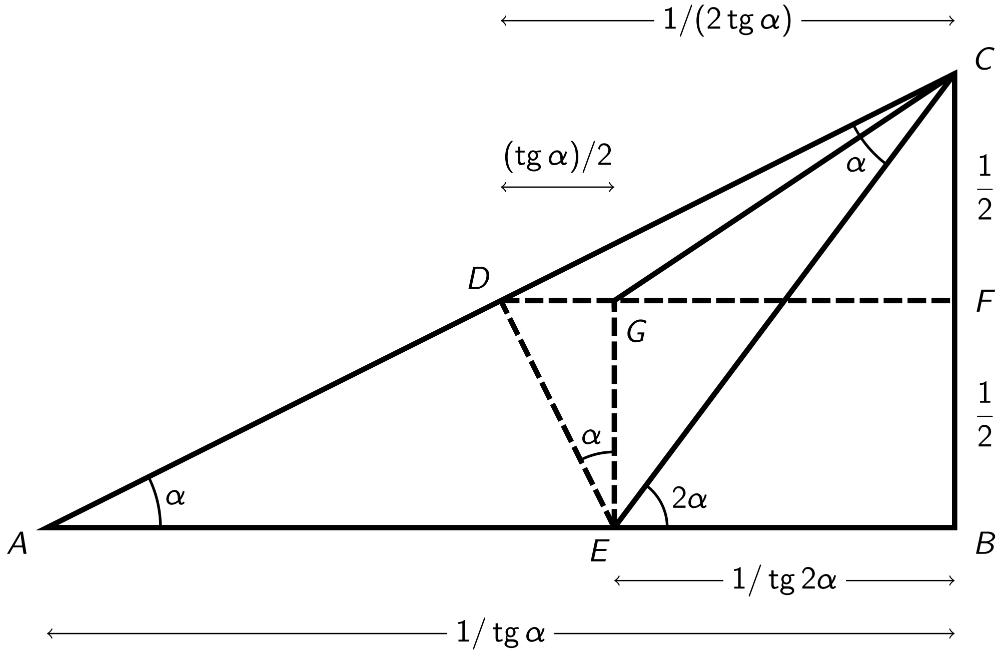

Figura 5.12: Demostración visual de la tangente del ángulo doble.

$\angle BAG = \angle BFG = \pi/2 - \alpha$ y $\angle ABF = \angle AGF = \pi/2 + \alpha$. Prolonguemos ahora el lado AC más allá del punto C y denotemos por H el punto de corte con BF. Se tiene que $\angle HCB = 2\alpha$ y por tanto $CH = \cos 2\alpha$. Como el rectángulo $ABDE$ y el paralelogramo $ABFG$ tienen la misma área se tiene que

$$2\cos^2\alpha = \cos 2\alpha + 1,$$

que es equivalente a (5.10). □

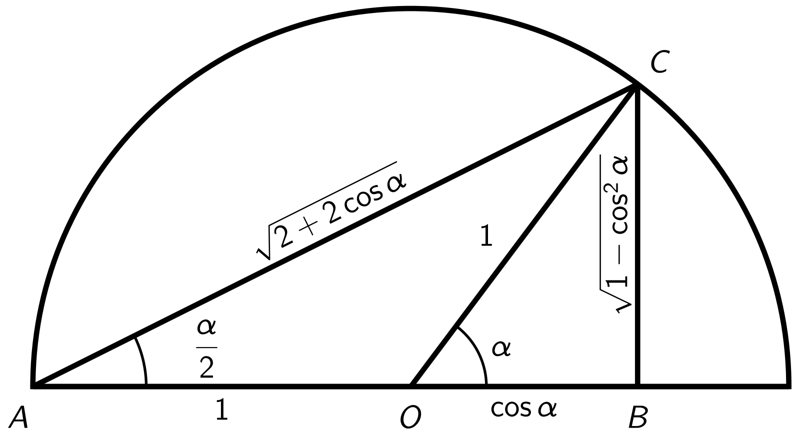

Figura 5.13: Demostración visual del seno y el coseno del ángulo mitad.

Proposición 5.12 (Tangente del ángulo doble)**.** *Para todo ángulo α, $\alpha \neq (2k+1)\pi/4$, k entero, se cumple que*

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{5.11}$$

Demostración geométrica. En nuestra demostración asumiremos que $0 < \alpha < \pi/4$. Sea ABC un triángulo rectángulo con hipotenusa AC, cateto BC de longitud 1 y ángulo $\angle BAC = \alpha$. Tracemos la perpendicular al segmento AC por su punto medio D (es decir, la mediatriz del segmento AC), que cortará al lado AB en E. Notemos que el triángulo ACE es isósceles y que así $\angle ACE = \alpha$ (ver Figura 5.12). También se tiene que $\angle BEC = 2\alpha$. Sea ahora F el punto medio del lado BC y G la proyección ortogonal de E sobre DF. Como $\angle DEG = \alpha$ y $EG = 1/2$, deducimos que $DG = (\operatorname{tg}\alpha)/2$. También se tendrá que $AB = 1/\operatorname{tg}\alpha$ y por tanto $DF = 1/(2\operatorname{tg}\alpha)$. Por último, $BE = 1/\operatorname{tg} 2\alpha$. De este modo se tiene que

$$\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha} - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}.$$

Operando llegamos a (5.11). □

Proposición 5.13 (Seno del ángulo mitad)**.** *Para todo ángulo α se cumple que*[1]

$$\operatorname{sen}(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \tag{5.12}$$

[1] El signo en (5.12) se toma según el cuadrante en el que se encuentra el ángulo $\alpha/2$.

Demostración geométrica. Asumamos que $0 < \alpha < \pi/2$. Construyamos una semicircunferencia de radio 1 y centro O. Desde uno de los extremos del diámetro, al que llamamos A, tracemos una cuerda AC de modo que $\angle OAC = \alpha/2$. Sea B la proyección ortogonal de C sobre el diámetro (ver Figura 5.13). Notemos que $\angle BOC = \alpha$ puesto que el triángulo AOC es isósceles (Teorema del ángulo inscrito). Luego $OB = \cos\alpha$ y $BC = \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ (ver Figura 5.2). Además, por el Teorema de Pitágoras (Teorema 1.1), se tiene que $AC = \sqrt{2+2\cos\alpha}$. Por lo tanto, fijándonos en el triángulo ABC, se cumple que

$$\operatorname{sen}(\alpha/2) = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sqrt{2+2\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \qquad \square$$

Proposición 5.14 (Coseno del ángulo mitad)**.** *Para todo ángulo α se cumple que*[2]

$$\cos(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \tag{5.13}$$

Demostración geométrica. La demostración sigue los mismos pasos de la anterior (ver también la Figura 5.13). En esa misma situación, para obtener (5.13) atendemos al triángulo ABC, donde se tiene que

$$\cos(\alpha/2) = \frac{1+\cos\alpha}{\sqrt{2+2\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \qquad \square$$

Proposición 5.15 (Tangente del ángulo mitad)**.** *Para todo ángulo α, $\alpha \neq (2k+1)\pi$, k entero, se cumple que*

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}. \tag{5.14}$$

Demostración geométrica. En la Figura 5.14, similar a la Figura 5.13, se tiene $BO = \cos\alpha$ y $BC = \operatorname{sen}\alpha$ y entonces

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha},$$

como queríamos probar. $\square$

[2] El signo en (5.13) se toma según el cuadrante en el que se encuentra el ángulo $\alpha/2$.

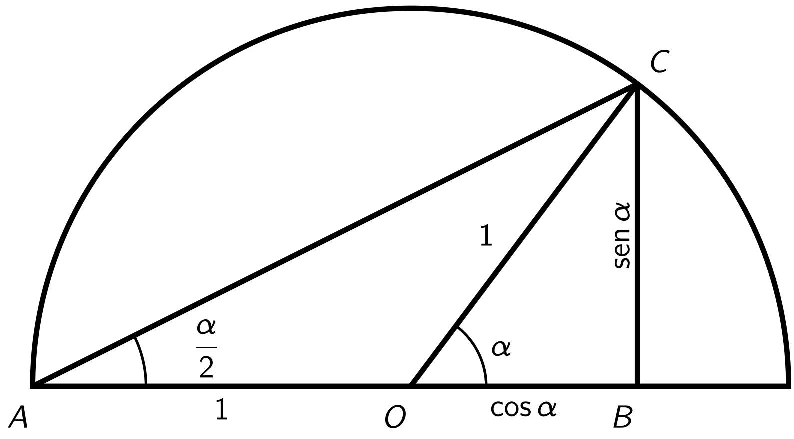

Figura 5.14: Demostración visual de la tangente del ángulo mitad.

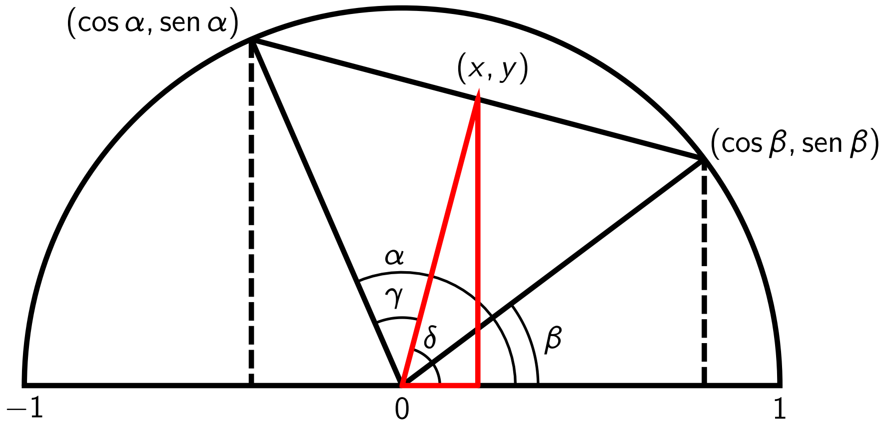

Figura 5.15: Demostración visual de las transformaciones de sumas en productos.

Proposición 5.16 (Transformaciones de sumas en productos)**.** *Para cualesquiera dos ángulos α y β se cumple que*

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

y

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Demostración geométrica. Asumamos que $0 < \beta < \pi/2$ y que $0 < \beta < \alpha < \pi - \beta$. Consideremos la (parte «superior» de la) semicircunferencia goniométrica y sea (x, y) el punto medio del segmento que une los puntos $(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$ y $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

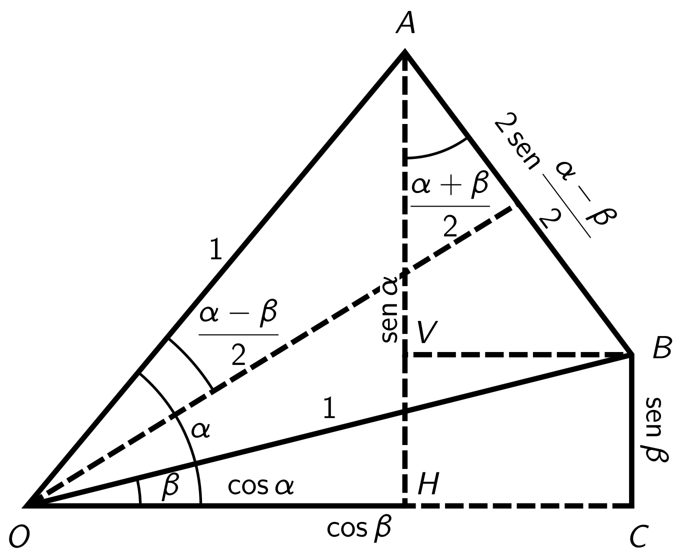

Figura 5.16: Demostración visual de las transformaciones de restas en productos.

Denotemos por γ el ángulo formado por los puntos (x, y), el origen y $(\cos\alpha, \mathrm{sen}\,\alpha)$, y por δ el ángulo que forman los puntos (x, y), el origen y el eje x (ver Figura 5.15). Notemos que

$$\gamma = \frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \text{y} \qquad \delta = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Entonces,

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2} = x = \cos\delta\cos\gamma = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

y

$$\frac{\mathrm{sen}\,\alpha + \mathrm{sen}\,\beta}{2} = y = \mathrm{sen}\,\delta\cos\gamma = \mathrm{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad \square$$

Proposición 5.17 (Transformaciones de restas en productos)**.** *Para cualesquiera dos ángulos α y β se cumple que*

$$\mathrm{sen}\,\alpha - \mathrm{sen}\,\beta = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \tag{5.15}$$

y

$$\cos\beta - \cos\alpha = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{5.16}$$

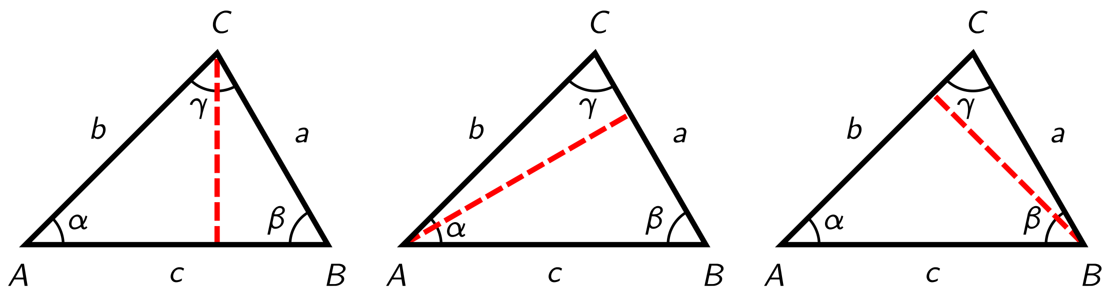

Figura 5.17: Demostración visual del Teorema del seno.

Demostración geométrica. Supongamos que $0 < \beta < \alpha < \pi/2$ y sean $A = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, $B = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$ puntos de la circunferencia goniométrica (de radio 1) de centro $O = (0,0)$. Sean los puntos $H = (\cos\alpha, 0)$ y $V = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\beta)$ (ver Figura 5.16). Notemos que el triángulo OAB es isósceles y que entonces la longitud de la cuerda AB es $2\operatorname{sen}((\alpha-\beta)/2)$.

También se tiene que

$$\angle BAV = \angle OAB - \angle OAV = \frac{\pi - (\alpha - \beta)}{2} - (\pi/2 - \alpha) = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

y por consiguiente,

$$AV = AB\cos(\angle BAV) = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \tag{5.17}$$

Por otro lado,

$$AV = AH - HV = \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta. \tag{5.18}$$

La igualdad entre (5.17) y (5.18) da la fórmula (5.15).

Para lograr (5.16) notemos que

$$BV = OC - OH = \cos\beta - \cos\alpha$$

y que

$$BV = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad \square$$

Teorema 5.18 (del seno)**.** *Sea ABC un triángulo cualquiera donde α, β y γ son los ángulos en los vértices A, B y C y a, b y c las longitudes de los lados opuestos a*

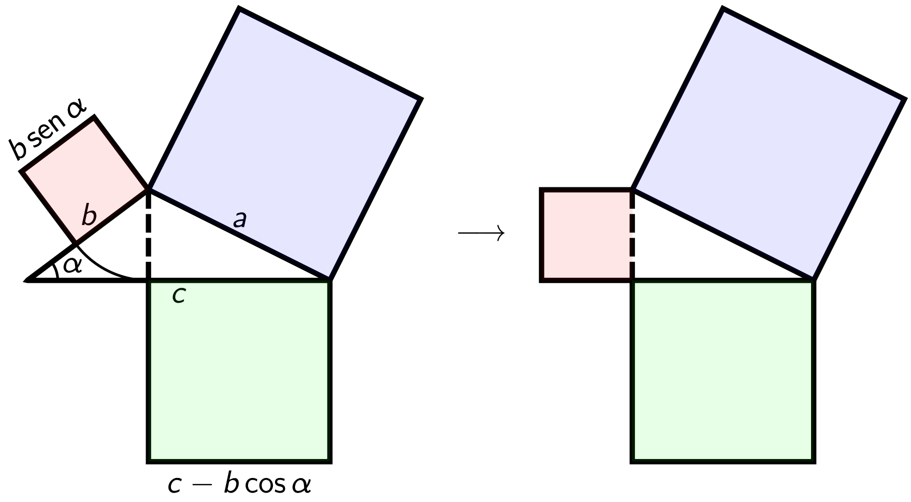

Figura 5.18: Demostración visual del Teorema del coseno.

esos ángulos, respectivamente. Se cumple que

$$\frac{a}{\mathrm{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\mathrm{sen}\,\beta} = \frac{c}{\mathrm{sen}\,\gamma}. \tag{5.19}$$

Demostración geométrica. Asumamos que $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi/2$. Construyamos un triángulo cualquiera ABC como el del enunciado. Primero tracemos su altura desde el vértice C, después desde el vértice B y por último desde el vértice A (ver Figura 5.17). De este modo el área del triángulo puede expresarse como

$$\frac{bc}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

o

$$\frac{ac}{2}\,\mathrm{sen}\,\beta$$

o

$$\frac{ab}{2}\,\mathrm{sen}\,\gamma.$$

Como todas estas expresiones refieren a la misma área, todas ellas son iguales, y así,

$$\frac{bc}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha, = \frac{ac}{2}\,\mathrm{sen}\,\beta = \frac{ab}{2}\,\mathrm{sen}\,\gamma.$$

que es equivalente a (5.19). □

Teorema 5.19 (del coseno)**.** *Sea ABC un triángulo cualquiera donde α, β y γ son los ángulos de los vértices A, B y C y a, b y c las longitudes de los lados opuestos a esos ángulos, respectivamente. Se cumple que*[3]

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \tag{5.20}$$

Demostración geométrica. Asumamos que $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi/2$. Consideremos un triángulo ABC como el del enunciado y tracemos su altura desde el vértice C que cortará al lado AB en D (ver Figura 5.18). Notemos que esa altura tiene una longitud de $b\operatorname{sen}\alpha$. Construyamos un cuadrado de lado $b\operatorname{sen}\alpha$ sobre el lado AC a partir del vértice C. Del mismo modo, observemos que AD tiene una longitud $b\cos\alpha$ y, por tanto, BD mide $c - b\cos\alpha$. Aplicando el Teorema de Pitágoras (Teorema1.1) al triángulo BCD se tiene que

$$a^2 = (b\operatorname{sen}\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2.$$

Desarrollando los cuadrados (ver Figura 1.4),

$$a^2 = b^2(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Usando que $\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$ (ver Figura 5.2) se llega a (5.20). □

5.4. Atención a la diversidad

La diversidad en las aulas de Secundaria y Bachillerato ha sido un tema tratado reiteradamente por los expertos en los últimos años y a día de hoy continúa siendo objeto de estudio. Cada alumno presenta unas determinadas características y un

[3] De igual modo se tienen las identidades:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

y

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

contexto que lo hacen un ser único y que reaccione de una forma particular en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En [5, Capítulo III] se considera que la atención a la diversidad debe servir como una respuesta a aquellos alumnos que presentan necesidades educativas especiales, dificultades específicas de aprendizaje, trastorno por déficit de atención e hiperactividad, altas capacidades intelectuales, incorporación tardía al sistema educativo o condiciones personales o de historia escolar, de tal forma que puedan alcanzar el máximo desarrollo posible de sus capacidades personales y, en todo caso, los objetivos de la etapa establecidos con carácter general para todo el alumnado.

Entre la problemática que presenta toda esta diversidad, aquí nos gustaría prestar especial atención a aquellos alumnos con problemas de visión, pues están claramente afectados por nuestra propuesta. Aunque obviamente se requeriría un estudio mucho más específico, adaptado a las circunstancias y el contexto de cada uno de los casos (en este sentido sería deseable analizar el Plan de atención a la diversidad del centro), proponemos aquí la incorporación de dibujos táctiles que establecerían una conexión entre la figura y la mente de nuestro alumno. La imaginación no entiende de impedimentos físicos[4]. Por el contenido de la propuesta también es conveniente hacer alusión a los alumnos con mayores dificultades de interpretación visual o problemas de visión de figuras matemáticas. El mapa del tesoro es un bien muy preciado, pero solo para aquellos que saben interpretarlo correctamente. Así, ha de entenderse que cada estudiante tiene sus propios ritmos de aprendizaje.

Por último, nos gustaría proponer el uso de demostraciones visuales con mayor nivel de dificultad que las que se muestran en este trabajo, destinadas a alumnos con mayor capacidad en este ámbito. En esta dirección, el profesor podría consultar referencias tales como [39, 40, 41, 23, 7, 8, 9, 10] para seleccionar este tipo de ejercicios más avanzados. Llegado el caso, podría invitarse al alumno a que tratara

[4]Un caso altamente excepcional pero que ilustra este hecho es el de Euler. Su prolífica carrera matemática no se vio afectada por los graves problemas de visión que sufrió durante sus últimos años.

de traducir las interpretaciones de las figuras a un lenguaje matemático formal.

5.5. Metodología

En esta sección proponemos una posible y flexible metodología que el profesor que vaya a poner en práctica esta propuesta en el aula puede optar por seguir. Para elaborarla hemos atendido a los consejos y sugerencias de [45, 46] y a la experiencia que proporcionó el *Prácticum* del máster. Para un mejor ajuste de la misma sería recomendable tener en cuenta las características de la clase a la que va dirigida, así como el contexto de los alumnos y del centro. A continuación detallamos los puntos más importantes de la metodología:

1. Se buscará una metodología activa que permita la interacción de los alumnos con el profesor y entre ellos en clase[5], en un ambiente preferentemente sosegado y propicio para el proceso educativo. El aprendizaje será mayoritariamente significativo, es decir, el alumno construirá nuevos conocimientos a partir de los que ya posee. De esta forma se tratarán de evitar en la medida de lo posible los procesos memorísticos en el aprendizaje.

2. El profesor debe ser siempre un apoyo para el estudiante, que es el protagonista principal en los procesos de enseñanza y aprendizaje, y controlar que esa ayuda nunca peque ni por exceso ni por defecto.

3. Antes de realizar cualquier cálculo, es conveniente instar a los estudiantes a diseñar un plan de actuación. En algunas ocasiones se obvia que para resolver un problema primero hay que comprenderlo. Además, una vez resuelto el ejercicio, se les debe animar a que repasen la solución, pues esto por un lado hará que se compruebe el ejercicio, y por otro puede abrir la posibilidad de enriquecerlo con nuevas ideas de resolución, o plantear generalizaciones del enunciado.

[5] Si fuese necesario se promoverá el trabajo en equipo desde el respeto hacia los demás.

4. En todo momento el profesor ha de señalar las posibles conexiones matemáticas entre los diferentes conceptos que se traten y retar, en el buen sentido de la palabra, al estudiante con buenas preguntas sobre el conocimiento que se ha intentado transmitir.

   Con alta probabilidad, y a raíz de lo que hemos indicado en la Sección 5.4, los alumnos pueden necesitar diferentes ritmos de aprendizaje que el profesor ha de considerar. Es muy importante que sea consciente de que sus conocimientos previos no son iguales a los de sus alumnos y que, por tanto, las interpretaciones a su parecer inmediatas de una figura pueden carecer de esa inmediatez en el estudiante. De igual modo habrá casos de alumnos con falta de motivación en mayor o menor grado por la materia. El profesor debe ser capaz de despertar la curiosidad por el tema.

5. Un factor determinante en el quehacer diario de todo matemático es la determinación para afrontar los retos a los que se enfrente en su labor profesional. Se hace interesante inculcar al alumno esta importante cualidad y enseñarle a valorar los pequeños avances en la búsqueda de soluciones a los problemas matemáticos.

6. Nuestra propuesta anima a fomentar la intuición entre el alumnado, por lo que siempre que ésta surja en clase se debe atender, aunque pueda ser errónea (ver [53, p. 67]), en cuyo caso se discutirá el porqué.

7. Las preguntas o sugerencias por parte de los alumnos siempre han de ser bien recibidas por el profesor y de hecho se ha de animar a los alumnos en esta práctica tan beneficiosa.

5.6. Desarrollo de la propuesta

El procedimiento elegido para exponer las figuras de las identidades trigonométricas o teoremas en clase ya se ha explicado en la Sección 5.3 y aquí detallaremos algunos aspectos del mismo. Lo primero que presentará el profesor a los alumnos será la imagen de la identidad o del teorema. El docente, siempre controlando los turnos de palabra, permitirá a los alumnos intervenir y proponer interpretaciones o ideas que ayuden a deducir la identidad a partir de la figura. En caso de no haber ningún comentario el profesor tratará de dar sugerencias o pistas que despierten las ideas en los alumnos. Una vez que la imagen ha sido interpretada (es muy importante asegurarse que toda la clase ha entendido los razonamientos visuales), se procederá a escribir la identidad trigonométrica o el resultado deducido. Si existe alguna conexión con otras figuras, alguna generalización natural o algún comentario interesante al respecto, el profesor deberá indicarlo a la clase.

La propuesta está diseñada para ser repartida en tres sesiones:

1ª Sesión: Comenzaremos esta clase explicando los ejercicios visuales más básicos de la propuesta, esto es, el que muestra que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman uno llano (Figura 5.1), el que hace referencia a la identidad fundamental de la Trigonometría (Figura 5.2) y el que prueba las identidades $\operatorname{sen}(\pi/2-\alpha)=\cos\alpha$ y $\cos(\pi/2-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$ (Figura 5.3). Los tres están vinculados al Objetivo 1 de la Sección 5.1. Además, los alumnos deberían conocer de cursos anteriores estos resultados por lo que presentarlos en primer lugar debería tener un efecto motivador en el estudiante. Seguidamente trataremos las identidades relativas a la suma y resta de ángulos (Figuras 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8 y 5.9). De este modo agrupamos en un bloque estas identidades que poseen la misma estructura (sumas y restas) y están relacionadas con el Objetivo 2. Es conveniente tener presente que este es el primer contacto de los estudiantes con las demostraciones sin palabras por lo que el profesor ha de tener paciencia y emplear el tiempo necesario para las explicaciones.

Como ejemplo sencillo de una posible actividad en esta sesión encontramos:

Ejercicio. Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = 0'63$ rad, $\cos\beta = 0'15$ rad y que $0<\alpha,\beta<\pi/2$, calcular (y dar el resultado en radianes):

a) $\text{sen}(\alpha + \beta)$.

b) $\cos(\alpha + \beta)$.

c) $\text{tg}(\alpha + \beta)$.

d) $\text{sen}(\alpha - \beta)$.

e) $\cos(\alpha - \beta)$.

f) $\text{tg}(\alpha - \beta)$.

2ª Sesión: Una vez que los estudiantes han sido familiarizados con el pensamiento visual, en esta clase centraremos nuestra atención en las identidades del ángulo doble y mitad (Figuras 5.10, 5.11, 5.12, 5.13 (Proposiciones 5.13 y 5.14) y 5.14). Al igual que en la sección anterior, la razón de agrupar estas identidades en una única clase es que todas ellas comparten la misma estructura (ángulos dobles o mitades). Esta sesión se vincula de forma directa con el Objetivo 3.

En el aula una posible actividad podría ser:

Ejercicio. Sabiendo que $\text{sen}\,\alpha = 0'13$ rad y que $0 < \alpha, \beta < \pi/2$, calcular (y dar el resultado en radianes):

a) $\text{sen}\,2\alpha$.

b) $\cos 2\alpha$.

c) $\text{tg}\,2\alpha$.

d) $\text{sen}(\alpha/2)$.

e) $\cos(\alpha/2)$.

f) $\text{tg}(\alpha/2)$.

3ª Sesión: Parte de esta última sesión finaliza con las identidades trigonométricas. En concreto se explican las transformaciones de sumas y restas en productos (Figuras 5.15 y 5.16). El resto de la clase está protagonizada por dos teoremas muy importantes de Geometría, el Teorema del seno y el Teorema del coseno

Resumen	
Sesión	**Figuras a ver**
1	5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8 y 5.9
2	5.10, 5.11, 5.12, 5.13 (Proposiciones 5.13 y 5.14) y 5.14
3	5.15, 5.16, 5.17 y 5.18

Tabla 5.1: Resumen de la distribución de las sesiones. *(Fuente: Elaboración propia)*

(Figuras 5.17 y 5.18). De esta manera completamos el Objetivo 4. Incluimos por último tres ejercicios para esta sesión:

Ejercicio. Sean $\alpha = 2\pi/3$ rad y $\beta = \pi/5$ rad. Transformar en producto:

a) $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta$.

b) $\cos\alpha + \cos\beta$.

c) $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta$.

d) $\cos\alpha - \cos\beta$.

Ejercicio. Sea un triángulo ABC tal que $AC = 3$, $BC = 5$, $\angle BAC = 63°$. ¿Cuánto mide (en radianes) el ángulo $\angle ABC$?

Ejercicio. Sea un triángulo ABC tal que $AB = 11$, $AC = 20$ y $\angle BAC = \pi/12$ rad. Hallar la longitud del lado BC.

De esta forma, la temporalización queda como se muestra en la Tabla 5.1.

5.7. Evaluación de la propuesta

Una parte muy importante de los procesos de enseñanza y aprendizaje es la evaluación. Para los alumnos, las calificaciones obtenidas representan la parte más relevante del curso porque miden, a su parecer[6], el éxito o el fracaso del año.

[6] Quizás esta tendencia esté provocada por el modelo educativo actual.

Hay una gran cantidad de tipos de evaluación en función del objeto a evaluar (ver [38]). En este apartado nos dedicaremos a ofrecer una posible vía para evaluar si la propuesta que proponemos en este trabajo es efectiva de cara al aprendizaje de las identidades trigonométricas y de los teoremas del seno y del coseno.

La mejor forma de contrastar este método de aprendizaje (a nuestro parecer) es comprobar en etapas posteriores el uso y la habilidad del alumno con las identidades trigonométricas y con los teoremas. Con seguridad, el estudiante se enfrentará en cursos más avanzados a problemas en los que el uso de las identidades trigonométricas (y teoremas) simplifique el proceso de resolución. Es en ese momento donde nos interesa que el alumno demuestre una cierta soltura con este tipo de fórmulas. Por ejemplo, en la prueba EBAU [50, Propuesta A] de la Universidad de La Rioja, el Ejercicio 2 (II) consistía en calcular la siguiente integral indefinida

$$\int (2 - \cos x - 3x) \cos x \, dx.$$

Por linealidad de la integral, una de las integrales que aparecen es

$$\int \cos^2 x \, dx.$$

El estudiante puede proceder aplicando el método de integración por partes para resolver esta última integral aunque el ejercicio resulta elemental si se usa (5.10).

En este escenario debemos esperar un determinado espacio de tiempo para evaluar la eficacia del método y no es posible presentar resultados inmediatos. Es por ello que hemos decidido dar aquí una evaluación alternativa (y a nuestro parecer menos precisa que la anterior) que no necesite de esta espera para contrastar resultados. Se basa en dos rúbricas en las que se consideran varios aspectos del aprendizaje catalogados con una escala Likert de tres niveles de respuesta (1 será el nivel menos valorado y 3 el más valorado). La primera de ellas se centra en los contenidos matemáticos impartidos en clase (Tabla 5.2). Como consideramos que la actitud y el comportamiento son también características importantes en los alumnos existe otra rúbrica que trata estos aspectos (Tabla 5.3). Ambas rúbricas son de uso docente.

El docente también tendrá que rellenar un cuestionario como en la Tabla 5.4. Por último, la opinión del alumno siempre debe ser tenida en cuenta. Por ello se ha preparado otro cuestionario para que cada estudiante lo rellene y lo entregue al profesor al finalizar la propuesta (Tabla 5.5).

La rúbrica sobre los contenidos matemáticos es la más relevante para conocer el alcance del método. La segunda rúbrica del comportamiento sirve para indicar si la forma de presentación es adecuada. Bajos niveles en la valoración de sus enunciados podrían indicar la necesidad de buscar otro modo de exponer las figuras a la clase. Los cuestionarios son de gran ayuda para estudiar las opiniones de los profesores y alumnos y para mejorar la propuesta en clase.

5.8. Uso de tecnología

La nuevas tecnologías han experimentado un gran avance desde finales del siglo XX que no ha pasado inadvertido en los sistemas educativos. Las posibilidades que ofrecen en la educación se traducen en una vía con la que mejorar el aprendizaje de los alumnos. En efecto, en [1] se hace explícita la consideración de este tipo de avances en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Este trabajo en concreto admite de una manera natural la incorporación de las nuevas tecnologías. En su forma más elemental el profesor puede optar (y esta es la elección que se ha seguido en las figuras de la Sección 5.3) por diseñar los recursos visuales con un ordenador. Pero se puede ir más allá mediante la elaboración de figuras en movimiento o entornos interactivos que permitan al usuario, en este caso el estudiante, interaccionar con los recursos visuales (ver por ejemplo [36]). Para obtener más información de cómo introducir las nuevas tecnologías en el aula referimos al lector a [14].

Sin embargo existen ciertos peligros a la hora de hacer uso de las nuevas tecnologías en clase. Siempre que se vayan a introducir elementos de este tipo en la visualización en matemáticas (o en matemáticas en general) debe estar bien presen-

Rúbrica de contenidos matemáticos				
Criterio a evaluar	**1**	**2**	**3**	**Puntos**
Ha participado aportando observaciones e ideas de interés para la comprensión de las figuras.	En menos de un 10 %.	Entre un 10 % y un 30 %.	En más de un 30 %.	
Ha resuelto los ejercicios de clase.	Menos de un 10 %.	Entre un 10 % y un 70 %.	Más de un 70 %.	
Ha comprendido los razonamientos sobre las figuras hechos en clase.	Menos del 30 %.	Entre un 30 % y un 90 %.	Más de un 90 %.	
Utiliza la memoria para enunciar una identidad trigonométrica.	Sí.	Con bastante frecuencia.	Prefiere utilizar la visualización.	
Es capaz de deducir varias identidades trigonométricas de una misma figura.	No es capaz.	En una figura.	En varias figuras.	
Se apoya en la visualización matemática para enunciar una identidad trigonométrica.	No se apoya.	En raras ocasiones.	A menudo.	

Tabla 5.2: Rúbrica para evaluar los contenidos matemáticos. *(Fuente: Elaboración propia)*

Rúbrica de actitud del estudiante frente al proyecto				
Criterio a evaluar	**1**	**2**	**3**	**Puntos**
Ha respetado el turno de palabra.	No.	A menudo no.	Sí.	
Muestra respeto por sus compañeros.	No.	Siempre.	Siempre y expresa su opinión de forma respetuosa.	
Si se da el caso, participa positiva y activamente con otros miembros de la clase (trabajo en equipo).	No.	En algunas ocasiones.	Sí.	
Muestra interés por la propuesta.	Poco o nada.	Bastante.	Mucho.	

Tabla 5.3: Rúbrica para evaluar la actitud del estudiante frente al proyecto. *(Fuente: Elaboración propia)*

te que ha de ser en beneficio de la formación académica del alumno. No podemos escudarnos en el mero hecho de que al ser una práctica moderna y novedosa ya es automáticamente favorable para el alumno. Por ejemplo, no puede ocurrir que se haga uso del ordenador en clase para calcular derivadas de funciones y que los estudiantes acaben la Educación Secundaria sin saber derivar funciones por sí mismos.

Cuestionario para el profesor	
Cuestión	**Respuesta**
Las explicaciones y las figuras han servido para que los alumnos comprendan de un modo más eficaz las identidades trigonométricas y los teoremas del seno y del coseno.	
La puesta en práctica de la propuesta ha ayudado a que los alumnos empleen menos la memoria en el aprendizaje de las identidades trigonométricas y los teoremas.	
Se han indicado las relaciones entre los contenidos y gracias a ello los alumnos son capaces de deducir varias identidades de la misma figura (con ligeras modificaciones).	
Los desarrollos en clase de los razonamientos visuales han permitido a los alumnos adquirir cierta autonomía en la comprensión de argumentos matemáticos.	
En líneas generales se ha seguido la metodología indicada.	
Las clases han despertado la curiosidad de los alumnos por el temario y han aumentado sus niveles de atención.	

Tabla 5.4: Cuestionario a rellenar por el profesor. *(Fuente: Elaboración propia)*

Cuestionario para el alumno	
Cuestión	**Respuesta**
Las figuras me han ayudado a entender mejor las identidades trigonométricas y los teoremas del seno y del coseno.	
Puedo prescindir del recurso memorístico para enunciar identidades trigonométricas.	
Soy capaz de obtener diferentes identidades trigonométricas modificando ligeramente una misma figura.	
El grado de dificultad de las figuras era. . .	
El diseño de las figuras era atractivo y facilitaba su comprensión.	
Prefiero las figuras realizadas a ordenador que las que han sido elaboradas a mano.	
El ambiente en clase permitía la participación.	
Observaciones y comentarios.	

Tabla 5.5: Cuestionario a rellenar por el alumno. *(Fuente: Elaboración propia)*

6. DISCUSIÓN

La visualización es una cualidad intrínseca de los seres humanos que nos conecta directamente con nuestro entorno. Por ello, entendemos que resulta antinatural apartar las técnicas visuales del aprendizaje. Efectivamente existen situaciones en las que nuestra intuición visual nos engaña o se manifiesta de un modo contradictorio. A pesar de eso, y así se ha querido dejar patente durante todo este trabajo, el uso de la visualización en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la asignatura de matemáticas supone grandes beneficios para el estudiante. En el tema que nos concierne, el alumno podrá aprender y comprender las identidades trigonométricas y los teoremas del seno y del coseno de forma efectiva sin recurrir en exceso a la memoria. Esto implica una adquisición de conocimientos más duradera en el tiempo. Por otro lado, el uso de demostraciones sin palabras acerca a los estudiantes al concepto de demostración matemática suavizando el proceso de abstracción. Es habitual observar en el quehacer matemático que muchas generalizaciones de conceptos con un alto nivel de abstracción nacen de otros más básicos susceptibles de ser visualizados. Por último, el modelo que planteamos potencia la creatividad matemática del estudiante.

En nuestra opinión, los puntos de esta propuesta que pueden presentar más inconvenientes son la evaluación y la temporalización. En el primer caso, lo ideal sería que el grado de comprensión y manejo de las identidades trigonométricas (y teoremas) se mostrara en cursos posteriores en relación con otras áreas de la Matemática. Aun así, seguiríamos sin estar completamente seguros de la forma que emplea el alumno para deducir la identidad. La planificación temporal es otro punto que debe abordarse con delicadeza. En el actual trabajo hemos utilizado tres sesiones para cubrir todas las figuras de la propuesta. Considerando que las unidades didácticas suelen estar diseñadas para desarrollarse en ocho sesiones en general, esto supone dedicar un $37'5\,\%$ del total de horas del tema a las identidades trigonométricas. Pero la experiencia en las aulas de Secundaria que proporcionó la asignatura del *Prácticum* nos mostró que ocho sesiones es un corto período de tiempo para impartir un tema tan importante como la Trigonometría.

Por otro lado, la propuesta que hemos diseñado está caracterizada por su gran viabilidad y su sencilla puesta en práctica en las aulas de Secundaria. Además, el coste que implica es mínimo si se elige la opción de elaborar las figuras con lápiz y papel (o tiza y pizarra). También es posible apoyarse en las nuevas tecnologías para la realización de los recursos gráficos. Su mayor precisión en las representaciones unido a la posibilidad de introducir animaciones y de permitir interactuar al usuario, en este caso el alumno, abren nuevas formas de enseñanza que hay que considerar. En este aspecto, es cierto que las identidades trigonométricas no permiten una gran variedad de opciones.

Se ha efectuado una extensa búsqueda en revistas de divulgación y científicas, libros y repositorios tales como *Google Académico*, la *Biblioteca de la Universidad de La Rioja* y *Dialnet* de trabajos que reflejen la situación actual de la visualización en matemáticas dentro del actual sistema educativo español. No ha habido resultados notables en ninguno de los casos por lo que sería deseable llevar a cabo un estudio en profundidad para evaluar el papel que desempeñan los métodos visuales en los procesos de enseñanza y aprendizaje del aula de matemáticas hoy en día.

Del mismo modo, hemos comprobado que existe una escasa literatura que trate explícitamente la enseñanza de las identidades trigonométricas en las aulas actuales de nuestro territorio. Creemos que sería muy provechoso realizar un estudio de las formas que tienen los docentes de impartir estas identidades y comprobar el grado de adquisición de las mismas en los estudiantes.

En los dos casos sospechamos que la situación podría mejorarse. Bajo nuestro punto de vista son pocos los docentes que conocen el potencial que ofrece el uso de la visualización en las aulas de matemáticas. Además, intuimos que las técnicas memorísticas predominan en la enseñanza de las identidades trigonométricas y los teoremas del seno y del coseno. Esperamos que este trabajo contribuya positivamente en ambos casos.

7. CONCLUSIONES

La Geometría se ha visto desplazada con el paso del tiempo en los sistemas educativos españoles hasta quedar relegada a un segundo plano. Lejos queda ya esa acendrada adoración helena hacia ella que tan bien reflejó Euclides en su obra *Elementos*.

En opinión del que escribe resulta un error no otorgar el protagonismo que merece esta rama de la Matemática en los currículos de la Educación Secundaria y del Bachillerato. La Geometría no solo se ocupa de su propia temática sino que existen estrechos lazos entre ésta y otras ramas que son susceptibles de ser utilizados para una mejora en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Incluso la propia realidad está empapada de figuras geométricas.

Además, la belleza intrínseca de la Geometría resulta siempre atractiva para el destinatario, en este caso el estudiante. Da la impresión de que las imágenes siempre son un acicate adicional para la motivación del alumno, quizás en parte porque parecen ocultar esa abstracción teórica propia del rigor de la Matemática.

Todo esto es motivo suficiente para considerar la Geometría como una rama vital en la enseñanza de las matemáticas en la Secundaria y el Bachillerato. Sin embargo, la llegada de las nuevas tecnologías al aula en los últimos años y su clara y cómoda adaptación a temas geométricos, justifican lo anteriormente escrito de una forma mucho más fuerte, mostrando que la Geometría era en la antigua Grecia, y puede ser hoy en día, un vehículo perfecto hacia el conocimiento matemático.

En nuestro caso particular, la visualización en matemáticas supone una herramienta de gran utilidad para el alumnado a la hora de aprender conceptos de Trigonometría. Al final de los estudios de Bachillerato de Ciencias se verá que, por ejemplo, determinadas integrales de funciones trigonométricas se resuelven de forma elegante utilizando identidades trigonométricas. Es por ello que una adquisición temprana y apropiada de éstas mediante el pensamiento visual es muy beneficiosa para el estudiante. Además, la propuesta que hacemos permite prescindir en gran medida del recurso memorístico en su aprendizaje, y sugiere una extensión natural a otros ámbitos de la Matemática (visualización de la recta real y de las propiedades de ciertas funciones como el valor absoluto, Análisis complejo, sistemas de ecuaciones e inecuaciones, diagramas de Venn en teoría de conjuntos útiles en Probabilidad, diagramas en Estadística, conceptos topológicos básicos, etc.).

Finalmente, creemos que el trabajo se ha elaborado de tal manera que permite completar todos los objetivos que nos habíamos propuesto. Solo queda por tanto poner en práctica todo este material en una situación real de aula.

APÉNDICE

Los ejemplos gráficos de nuestra propuesta educativa en este trabajo se componen de figuras realizadas con ordenador (ver Sección 5.3). En este apéndice incluimos representaciones a mano, realizadas por el autor, de esas figuras para tratar de mostrar que la propuesta es perfectamente viable aun sin el uso de los recursos tecnológicos actuales.

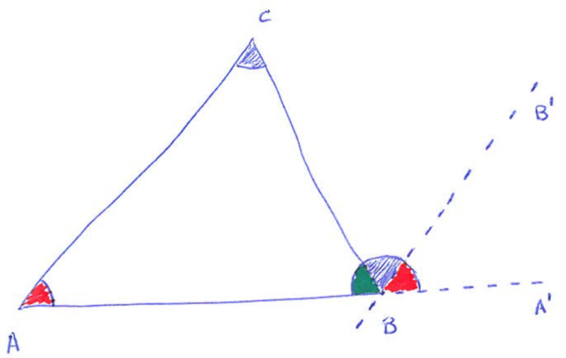

Figura 5.1: Demostración visual de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

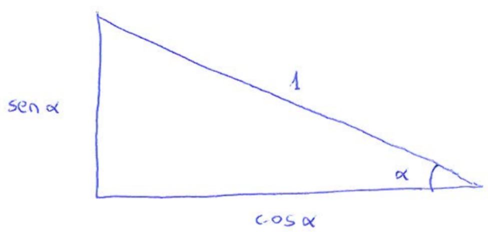

Figura 5.2: Identidad fundamental de la Trigonometría.

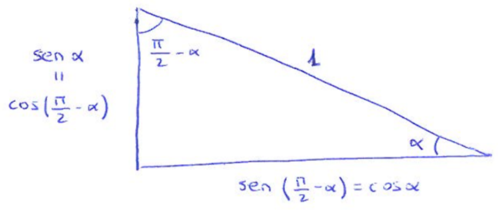

Figura 5.3: Demostración visual de que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ y que $\text{sen}\,\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

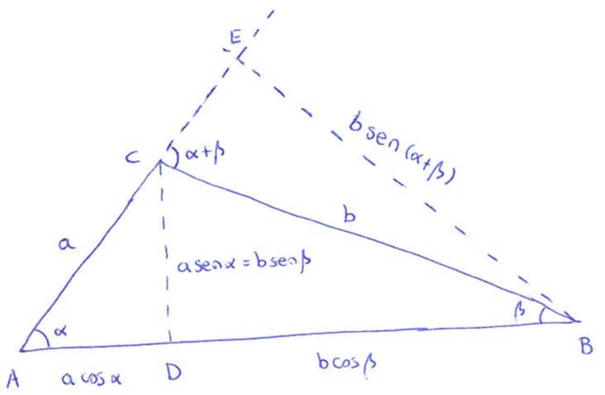

Figura 5.4: Demostración visual del seno de la suma.

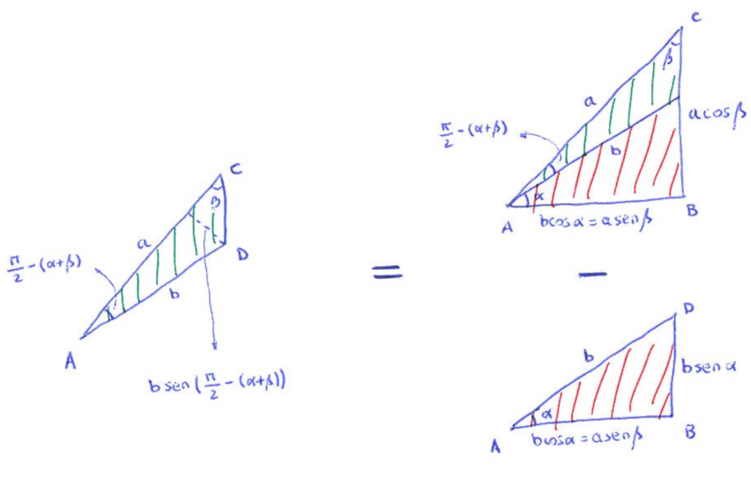

Figura 5.5: Demostración visual del coseno de la suma.

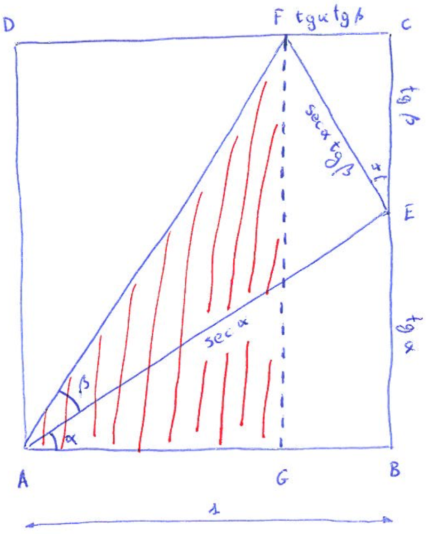

Figura 5.6: Demostración visual de la tangente de la suma.

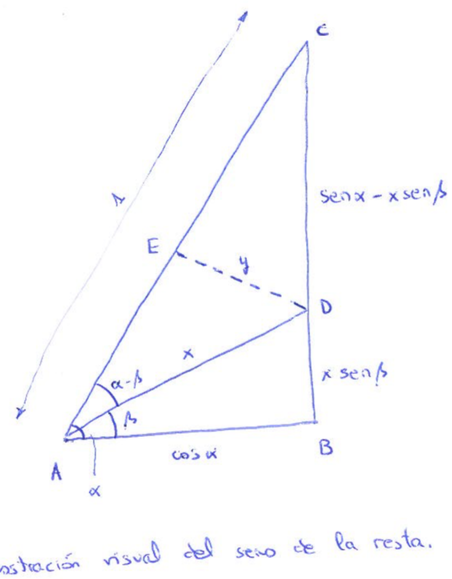

Figura 5.7: Demostración visual del seno de la resta.

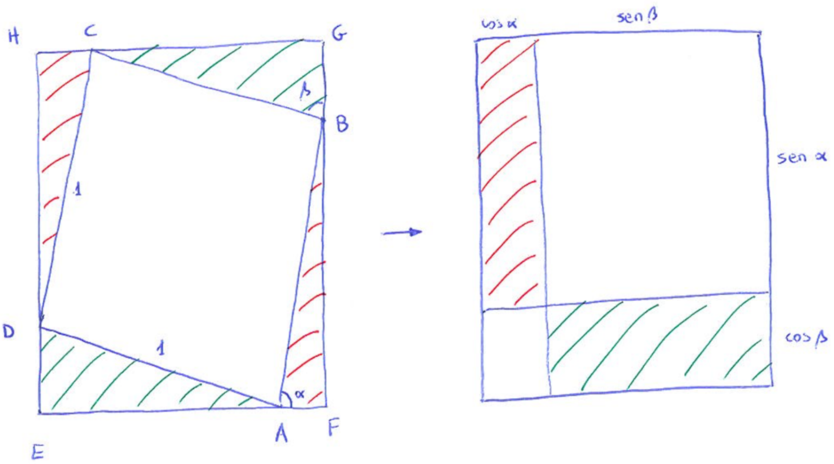

Figura 5.8: Demostración visual del coseno de la resta.

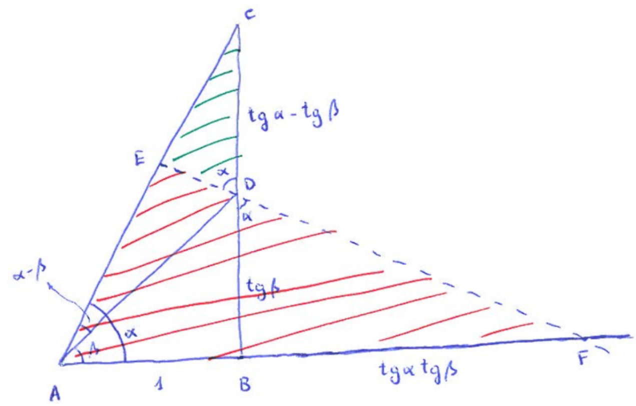

Figura 5.9: Demostración visual de la tangente de la resta.

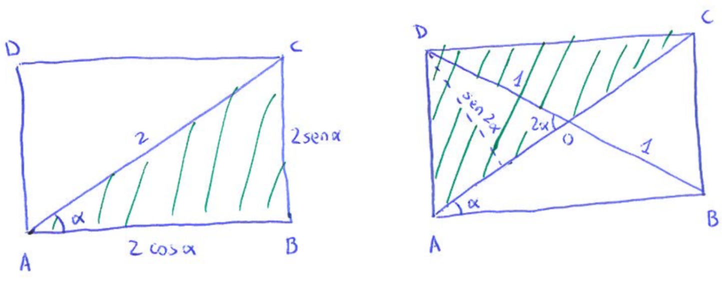

Figura 5.10: Demostración del seno del ángulo doble.

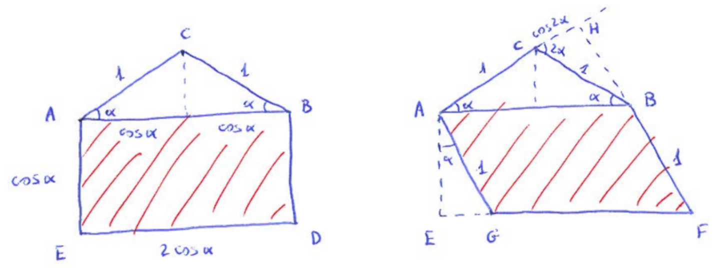

Figura 5.11: Demostración visual del coseno del ángulo doble.

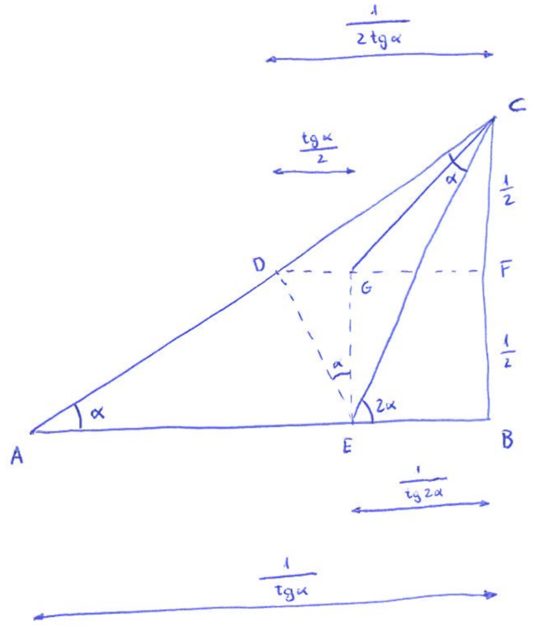

Figura 5.12. Demostración visual de la tangente del ángulo doble.

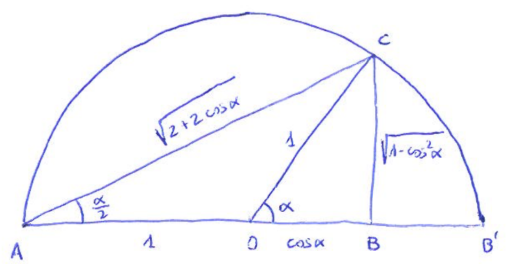

Figura 5.13: Demostración visual del seno y el coseno del ángulo mitad.

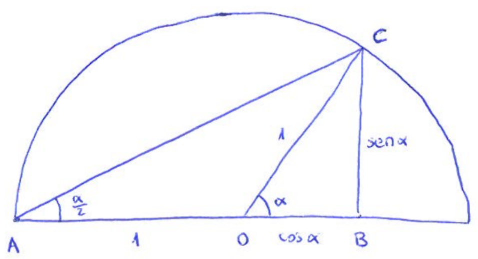

Figura 5.14: Demostración visual de la tangente del ángulo mitad.

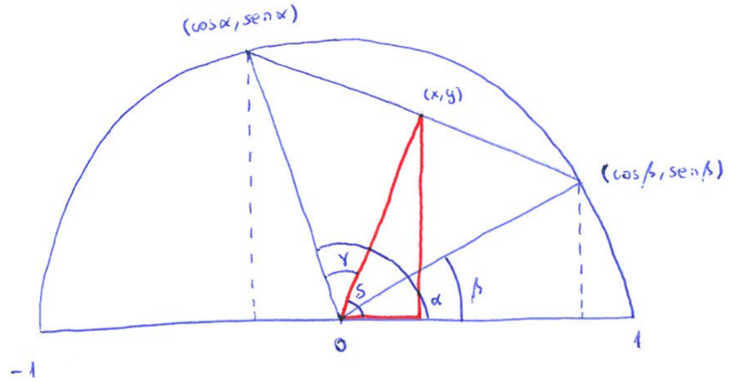

Figura 5.15: Demostración visual de las transformaciones de sumas en productos.

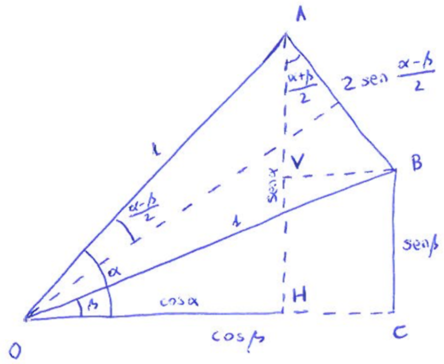

Figura 5.16: Demostración visual de las transformaciones de restas en productos.

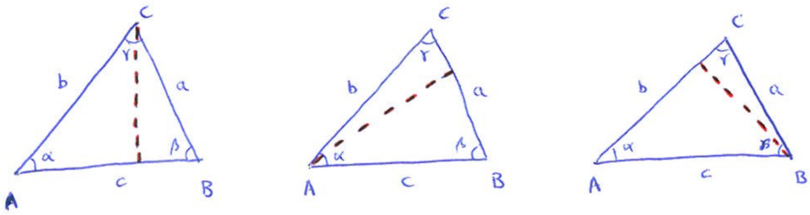

Figura 5.17: Demostración visual del Teorema del seno.

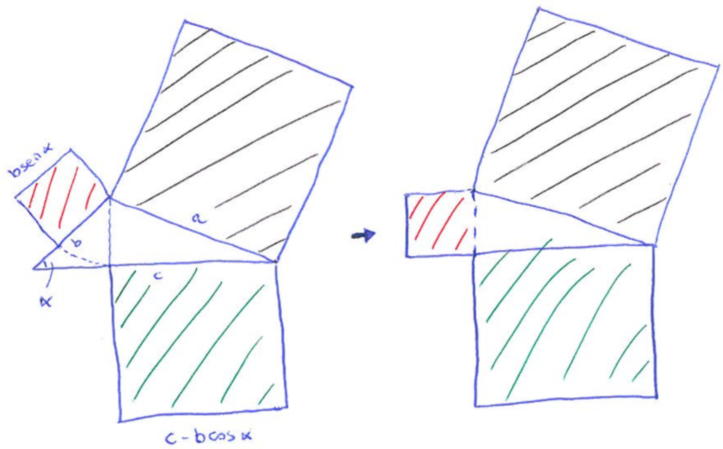

Figura 5.18: Demostración visual del Teorema del coseno.

BIBLIOGRAFÍA

Documentos legales

[1] Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa.

[2] Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

[3] Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.

[4] Decreto 19/2015, de 12 de junio, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se regulan determinados aspectos sobre su organización así como la evaluación, promoción y titulación del alumnado de la Comunidad Autónoma de La Rioja.

[5] Decreto 21/2015, de 26 de junio, por el que se establece el currículo de Bachillerato y se regulan determinados aspectos sobre su organización, evaluación, promoción y titulación del alumnado de la Comunidad Autónoma de La Rioja.

Libros y artículos

[6] C. Alsina, C. Q. D.: Cómo Quisiéramos Demostrar, *Sigma*, **32** (2008), 135–146. (Adaptación de la conferencia C. Q. D. impartida por este autor)

[7] C. Alsina y R. B. Nelsen, *Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics*, The Mathematical Association of America, Inc., EEUU, 2006.

[8] C. Alsina y R. B. Nelsen, *When Less Is More: Visualizing Basic Inequalities*, The Mathematical Association of America, Inc., EEUU, 2009.

[9] C. ALSINA Y R. B. NELSEN, *Charming Proofs: A Journey into Elegant Mathematics*, The Mathematical Association of America, Inc., EEUU, 2010.

[10] C. ALSINA Y R. B. NELSEN, *A Mathematical Space Odyssey: Solid Geometry in the 21st Century*, The Mathematical Association of America, Inc., EEUU, 2015.

[11] A. ARCAVI, The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, **52** (2003), 215–241.

[12] A. J. BISHOP, A Review of Research of Visualization in Mathematics Education, *Proceedings of the 12th PME International Conference (Ed. A. Borbas)*, **1** (1988), 170–176.

[13] L. C. CATERINO, R. W. KULHAVY Y W. A. STOCK, Reference Maps as a Framework for Remembering Text, *Comprehension of Graphics (Eds: W. Schnotz y R. W. Kulhavy)*, **41** (1993), 47–62.

[14] C. COLL Y C. MONEREO (EDS), *Psicología de la Educación Virtual*, Morata, Madrid, 2008.

[15] S. CUNNINGHAM Y W. ZIMMERMANN, *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, The Mathematical Association of America, EEUU, 1981. (Edición combinada)

[16] P. J. DAVIS, Visual Theorems, *Educational Studies in Mathematics*, **24** (1993), 333–344.

[17] T. DOYLE, L. KUTLER, R. MILLER Y A. SCHUELLER, Proofs Without Words and Beyond, *Convergence*. (Revista online)

[18] T. DREYFUS, On the Status of Visual Reasoning in Mathematics and Mathematics Education, *Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (1991), 63–78.

[19] F. M. Jr. Dwyer, Adapting Visual Illustrations for Effective Learning, *Harvard Educational Review*, **37** (1967), 250–263.

[20] F. M. Jr. Dwyer, When Visuals Are Not the Message, *Educational Broadcasting Review*, **2** (1968), 38–43.

[21] T. Dreyfus y T. Eisenberg, On the Reluctance to Visualize in Mathematics, *Visualization in teaching and learning mathematics*, (1991), 33–48.

[22] I. M. Gómez Chacón, Visualización Matemática: Intuición y Razonamiento, *Contribuciones matemáticas en honor a Juan Tarrés, Universidad Complutense de Madrid*, **1** (2012), 201–219.

[23] M. de Guzmán, *El Rincón de la Pizarra: Ensayos de Visualización en Análisis Matemático. Elementos básicos del Análisis*, Pirámide (Grupo Anaya S. A.), Madrid, 2010.

[24] M. de Guzmán, The Role of Visualization in the Teaching and Learning of Mathematical Analysis, *Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level)*, (2002), 2–25.

[25] M. Giaquinto, *Visual Thinking in Mathematics: An Epistemological Study*, Oxford University Press, Oxford, 2007.

[26] J. Hadamard, *An Essay on The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton University Press, New Jersey, 1945.

[27] M. J. Haring y M. A. Fry, Effect of Pictures on Children's Comprehension of Written Text, *Educational Communication and Technology*, **27** (1979), 185–190.

[28] H.-C. Hege, D. Hoffman, C. R. Johnson, K. Polthier y M. Rumpf (eds.), *Mathematics and Visualization*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2006-2019. (Serie de 48 volúmenes)

[29] D. HILBERT, *The Foundations of Geometry*, The Open Court Pub. Co., La Salle, Illinois, 1950. (Traducción al inglés por E. J. Townsend)

[30] L. M. IGLESIAS ALBARRÁN, Demostraciones del Teorema de Pitágoras con Goma EVA, *Epsilon*, **97** (2017), 57–64.

[31] R. ISAACS, Two Mathematical Papers without Words, *Mathematics Magazine*, **48** (1975), 198. (Artículo de una página)

[32] G. KADUNZ Y M. YERUSHALMY, Visualization in the Teaching and Learning of Mathematics, *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (Ed. S. J. Cho)*, **4** (2006), 457–464.

[33] D. KAMBER Y D. TAKACI, On Problematic Aspects in Learning Trigonometry, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **49** (2017), 161–175.

[34] W. A. KEALY, R. W. KULHAVY Y W. A. STOCK, How Geographic Maps Increase Recall of Instructional Text, *Educational Technology Research and Developement*, **41** (1993), 47–62.

[35] Y. KOBAYASHI, Tangent Double Angle Identity, *The College Mathematics Journal*, **44** (2013), 47. (Artículo de una página)

[36] C. MATUS Y H. MIRANDA, Lo que la Investigación Sabe Acerca del Uso de Manipulativos Virtuales en el Aprendizaje de la Matemática, *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, **6** (2010), 143–151.

[37] M.ª D. MORENO MARTEL, El Uso de la Visualización en una Clase de Matemáticas, *El Guiniguada*, **8**/**9** (1999/2000), 385–392.

[38] J. MURILLO, La Evaluación en Matemáticas, 24 páginas. (Material no publicado)

[39] R. B. NELSEN, *Proofs Without Words I: Exercises in Visual Thinking*, The Mathematical Association of America, Inc., EEUU, 1993.

[40] R. B. NELSEN, *Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking*, The Mathematical Association of America, Inc., EEUU, 2000.

[41] R. B. NELSEN, *Proofs Without Words III: Further Exercises in Visual Thinking*, The Mathematical Association of America, Inc., EEUU, 20015.

[42] O. NEUGEBAUER, *The Exact Sciences in Antiquity*, Dover Publications, Inc., New York, 1969. (Segunda edición)

[43] A. PAIVIO, *Mental Representations: A Dual Coding Approach*, Oxford University Press, New York-Oxford, 1990.

[44] L. M. PHILLIPS, S. P. NORRIS Y J. S. MACNAB, *Visualization in Mathematics, Reading and Science Education*, Springer, Dordrecht-Heilderberg-Londres-New York, 1973. (Segunda edición)

[45] G. PÓLYA, *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, New Jersey, 1973. (Segunda edición)

[46] G. PÓLYA, *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*, John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto, 1981. (Edición combinada)

[47] N. C. PRESMEG, Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future (Eds. A. Gutiérrez y P. Boero)*, (2006), 205–236.

[48] J. E. READENCE Y D. W. MOORE, A Meta-analytic Review of the Effect of Adjunct Pictures on Reading Comprehension, *Psychology in the Schools*, **18** (1981), 218–224.

[49] B. RÖSKEN AND K. ROLKA, A Picture is Worth a 1000 Words - The Role of Visualization in Mathematics Learning, *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Eds. J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, and N. Stehlíková)*, **4** (2006), 457–464.

[50] UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad, Curso 2017/2018, Convocatoria de julio, Asignatura de Matemáticas II.

[51] B. L. VAN DER WAERDEN, *Science Awakening*, Oxford University Press, New York, 1961. (Traducción al inglés por A. Dresden)

[52] I. VEKIRI, What Is the Value of Graphical Displays in Learning?, *Educational Psychology Review*, **14** (2002), 261–312.

[53] S. VINNER, From Intuition to Inhibition - Mathematics, Education, and other Endangered Species, *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Ed. E. Pehkonen)*, **1** (1997), 63–78.

[54] R. WALLER, Understanding Network Diagrams, artículo presentado en *Annual Meeting of the American Educational Research Association*, Los Ángeles, 1981.